Εργασία 3η
Τα άλυτα προβλήματα της Ελληνικής Αρχαιότητας

α)Θεωρία
β)Κατασκευή οργάνων «κυβιστή» «τριχοτόμου» «τετραγωνιστή»
γ)Να διπλασιάσεις τον κύβο και να κατεβάσεις την «γάτα» από το «δένδρο»

Γενικά για τα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητος:

Τρία είναι τα πλέον διάσημα , για τα οποία είχε αναπτυχθεί ιδιαίτερος προβληματισμός και προσπάθεια.

- **Το «Δήλιο πρόβλημα» δηλ. ο διπλασιασμός του κύβου** , πρόβλημα που έγινε Πανελληνίως γνωστό, όταν το μαντείο του Δηλίου Απόλλωνος απάντησε για το τι πρέπει να γίνει, ώστε να απαλλαγεί η νήσος Δήλος από τον λοιμό που την μάστιζε:

-Να διπλασιαστεί ο κυβικός βωμός που Απόλλωνος

- **Η τριχοτόμηση γωνίας** , δηλαδή ο χωρισμός τυχούσας γωνίας σε τρεις ίσες γωνίες
- **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**, δηλαδή η εύρεση τετραγώνου, το οποίο να έχει ίσο εμβαδόν με κύκλο γνωστής και δοθείσης ακτίνος.

Δήλιο Πρόβλημα:

Κατ' αρχάς , το Δήλιο πρόβλημα , έχει ως **ανάλογό του** το πρόβλημα του **διπλασιασμού του τετραγώνου** . Δηλ. αν έχω τετράγωνο πλευράς α να βρεθεί τετράγωνο πλευράς δ : $δ^2=2α^2$, πράγμα που μας οδηγεί στην λύση του δ ως της διαγωνίου του αρχικού τετραγώνου.

Κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ., οι Δήλιοι αναγκάστηκαν να συμβουλευτούν ακόμα και τον Πλάτωνα για να δώσουν λύση στο πρόβλημα. Ιδιαίτερη αναφορά είχε κάνει και ο Ερατοσθένης σε γράμμα, που έστειλε στο Βασιλικό προστάτη, Πτολεμαίο ΙΙΙ, στο οποίο περιέγραφε το μεσολάβο, ένα ειδικό όργανο που κατασκεύασε για την επίλυση του προβλήματος

Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, σώθηκαν και φθάσανε σε μάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη **Ευτόκιο** (6 αι. μ.χ). Αυτός σχολιάζοντας ανάλογο πρόβλημα του Αρχιμήδη και τη μέθοδο που αυτός χρησιμοποίησε για να το λύσει, δίνει όλες τις λύσεις παρεμβολής που του ήταν τότε γνωστές από παλαιότερες συγγραφές. **Οι λύσεις που δίνει είναι 12 και η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα**. Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τους :

Ιπποκράτη τον Χίο (470-400 π.Χ) **Αρχίτα τον Ταραντίνο** (428-365 π.χ) **Πλάτωνα** (427-347 π.Χ) **Μέναιχμο (**375- π.Χ) **Αρχιμήδη** (287-212 π.Χ) **Ερατοσθένη** (276-194 π.Χ) **Απολλώνιο** (265-170 π.Χ) **Νικομήδη (**έζησε γύρω

στο 200 π.χ) **Ήρωνα τον Αλεξανδρινό** (1ος -2ος αι. μ.Χ) **Διοκλή** (1ος αι. π.χ) και **Πάππο τον Αλεξανδρινό** (3ος αι. μ.χ)

Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** (470-400 π.Χ) ανήγαγε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (δηλ. με σύγχρονη διατύπωση δοθέντος τμήματος α, να βρεθεί χ : $\chi^3=2\alpha^3$) Σε πρόβλημα παρεμβολής μεταξύ των τμημάτων α και 2 α δύο υπό αναζήτηση τμημάτων χ , ψ , τέτοιων ώστε:

$$\frac{2\alpha}{\psi}=\frac{\psi}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha}$$

Αν μπορέσουν να κατασκευασθούν αυτά τα τμήματα, τότε από την πρώτη αναλογία θα έχω :
$\psi^2=2\alpha\chi$ (1) , ενώ από την δεύτερη $\chi^2=\alpha\psi$ (2)
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) με ψ έχω

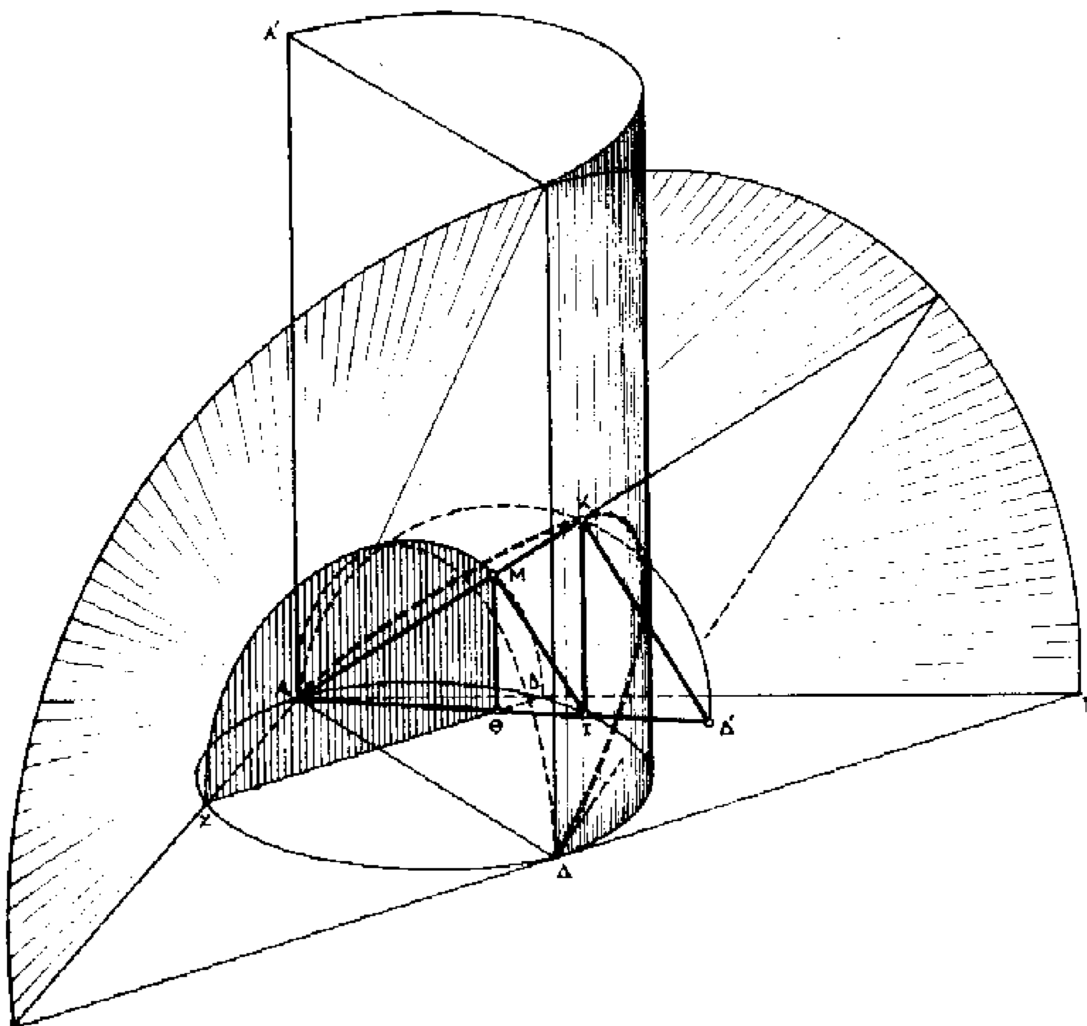
$$\psi\chi^2=\alpha\psi^2 \xrightarrow{(1)} \psi\chi^2=\alpha 2\alpha\chi \xrightarrow{\chi} \psi\chi\chi^2=\alpha 2\alpha\chi^2 \xrightarrow{(2)}$$

$$\psi\chi^3=2\alpha^2\chi^2 \xrightarrow{(2)} \psi\chi^3=2\alpha^2\psi \rightarrow \chi^3=2\alpha^3$$

Προφανώς από την τελευταία παίρνουμε

$$\chi=\alpha\sqrt[3]{2}$$

Η λύση του Αρχύτα του Ταραντινού



Εικόνα 1 : Η λύση του Αρχύτα: γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΑΔ=2α και χορδή του ΑΒ =α που προεκτεινόμενη τέμνει την εφαπτόμενη ΔΠ . Υψώνουμε ορθόν ημικύλινδρο με βάση το ημικύκλιο και θεωρούμε το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΔ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του ημικυλίνδρου. Στρέφουμε το ημικύκλιο γύρω από την ΑΑ' και η παραγόμενη σπείρα τέμνει την κυλινδρική επιφάνεια κατά μία καμπύλη ΔΚΑ . Στρέφουμε ακ΄9μη το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΠ γύρω από την ΑΔ και έτσι η ΑΠ παράγει μια κωνική επιφάνεια που κόβει την προηγούμενη καμπύλη ΔΚΑ στο Κ . Ταυτοχρόνως το Β θα διαγράψει πάνω σε αυτή την κωνική επιφάνεια ημιπεριφέρεια ΒΜΖ . έστω τώρα το ημικύκλιο ΑΚΔ' του εκ περιστροφής στερεού, που αντιστοιχεί στο σημείο Κ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ' . Η τομή ΜΘ των επιπέδων, ΑΚΔ' και ΒΜΖ είναι κάθετος στο επίπεδο ΑΒΔΖ διότι και τα επίπεδα αυτά είναι κάθετα επάνω του . Φέρουμε εκ

του Κ κάθετο ΚΙ πάνω στο επίπεδο του κύκλου ΑΒΔΖ Αυτή ανήκει στην κυλινδρική επιφάνεια, δηλ. το Ι βρίσκεται πάνω στον κύκλο ΑΒΔΖ == Έχουμε τώρα τον παρακάτω συλλογισμό. : Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΜΒ έχουμε: $ΜΘ^2$=ΖΘ ΘΒ (θεώρημα ύψους) . Από δύναμη σημείου ως προς κύκλο, στον ΑΒΔΖ, έχω: ΖΘ ΘΒ = ΑΘ ΘΙ . Άρα: $ΜΘ^2$ = ΑΘ ΘΙ . Επομένως, ΑΜΙ~ΑΜΘ~ ΜΘΙ και η γωνία ΑΜΙ=1 ορθή . όμως ορθή είναι και η γωνία ΑΚΔ' . επομένως η ΚΔ' είναι παράλληλη της ΜΙ . ==== Έτσι έχουμε ότι ΑΚΔ'~ ΚΑΙ~ ΑΜΙ και επομένως $\frac{ΑΔ'}{ΑΚ}=\frac{ΑΚ}{ΑΙ}=\frac{ΑΙ}{ΑΜ}$ όμως, ΑΔ'=ΑΔ λόγω της περιστροφής και ΑΜ =ΑΒ λόγω του κώνου. Έτσι

$$\frac{ΑΔ=2α}{ΑΚ}=\frac{ΑΚ}{ΑΙ}=\frac{ΑΙ}{ΑΒ=α}$$ πράγμα που μας λέει ότι η πλευρά του διπλασίου του κύβου , από εκείνον που είχε πλευρά α, είναι η ΑΙ . Δηλαδή ΑΙ= $α\sqrt[3]{2}$

Πώς όμως κατέληξε σε αυτή την λύση ο Αρχύτας;

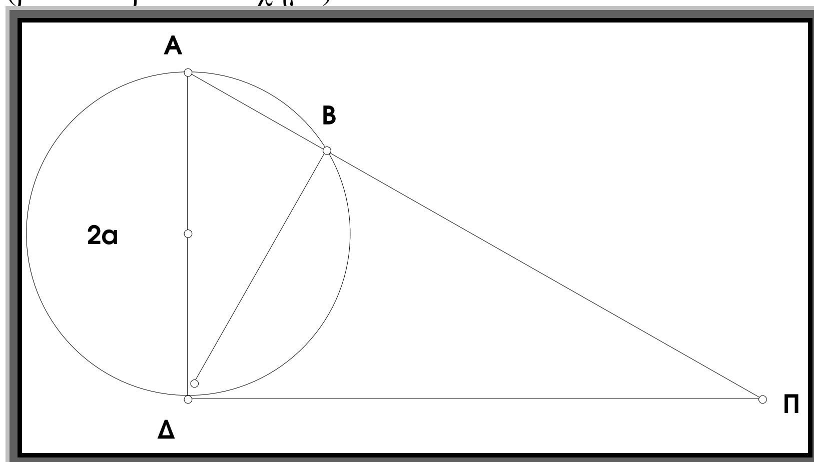
Πιθανόν ο Αρχύτας ξεκινώντας από την ανάλυση του προβλήματος που είχε κάνει ο Ιπποκράτης ο Χίος, δηλ .

$$\frac{2α}{ψ}=\frac{ψ}{χ}=\frac{χ}{α}$$ ανεζήτησε δύο ορθογώνια τρίγωνα , εγγεγραμμένα σε ημιπεριφέρειες διαμέτρων ΑΔ=2 α= ΑΔ' που να πληρούν τις αναλογίες $\frac{2α}{ψ}=\frac{ψ}{χ}$ και $\frac{ψ}{χ}=\frac{χ}{α}$ από αυτές παίρνω $χ^2$=αψ και $χ^2$ = 2 α $\frac{ψ}{2}$ Τα τρίγωνα αυτά θα είναι όπως παρακάτω:

Εικόνα 2: Η αρχική ανάλυση του προβλήματος από τον Αρχύτα.

Αν στρέψουμε το επίπεδο ΑΚΔ’ γύρω από την ΑΔ’ μέχρι να γίνει κάθετο στο επίπεδο ΑΙΔ , τα τρίγωνα θα πάρουν την θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

και η ΚΙ θα είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΙΔ . Άρα το Κ θ βρίσκεται πάνω στον ορθό ημικύλινδρο με βάση το ημικύκλιο ΑΔΙ. Τέτοια σημεία με την ιδιότητα του Κ υπάρχουν άπειρα πάνω στην επιφάνεια του ημικυλίνδρου. . Ένα όμως από αυτά ικανοποιεί την συνθήκη ΑΖ=ψ/2 . Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΚ , να έχουμε την γωνία ΚΑΖ=60^o .
Επομένως , θα αρκούσε να χαράξει πάνω στο επίπεδο ΑΔΙ μια γωνία αΑΔ=60^o (βλέπε παρακάτω σχήμα)

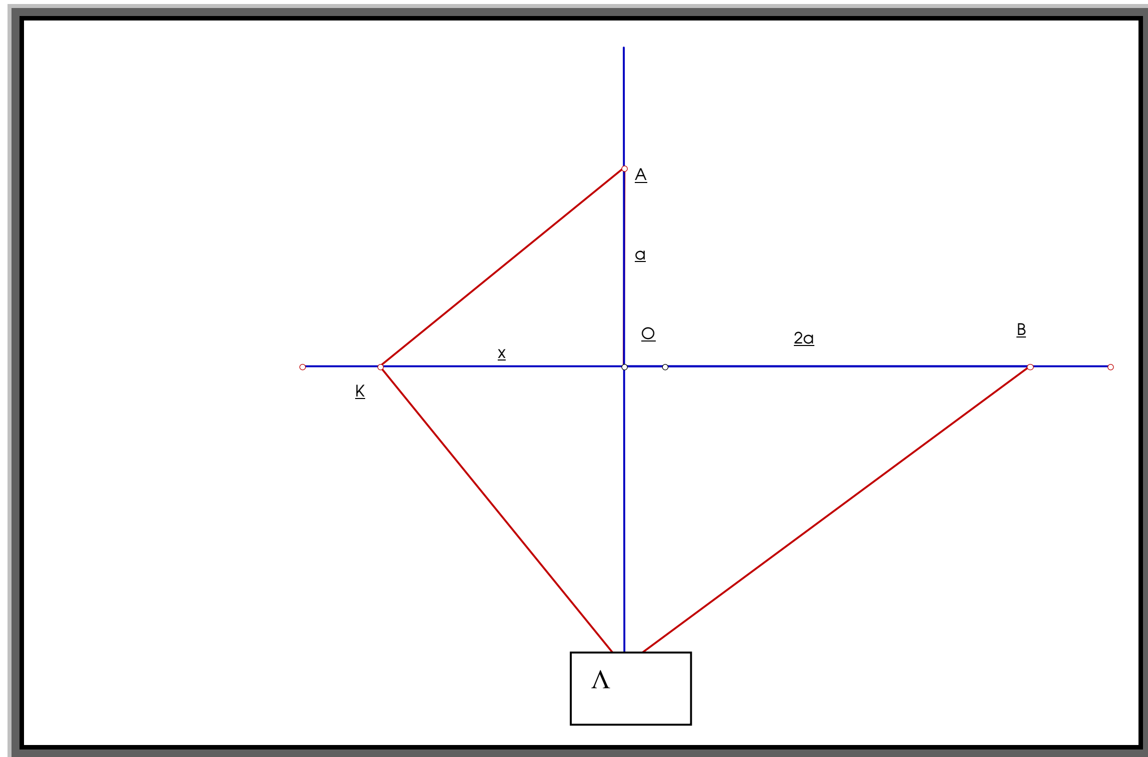


και να την στρέψει γύρω από την ΑΔ μέχρι η άλλη της πλευρά να συναντήσει την τομή της ημικυλινδρικής επιφάνειας με την σπείρα που διαγράφει το ημικύκλιο ΑΚΔ' .
Αυτό λοιπόν κάνει ο Αρχύτας ξεκινώντας την λύση του με την κατασκευή αυτής της γωνίας παίρνοντας την διάμετρο ΑΔ=2 α και την χορδή ΑΒ = α .

Η λύση του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.)

Ο Πλάτων επινόησε μια διάταξη , σύμφωνα με την οποία, κάνοντας μια κίνηση ενός οργάνου επί τούτω, μπορούμε να παρεμβάλουμε ανάμεσα στο α και το 2 α τους μέσους αναλόγους που προέβλεπε η ανάλυση του προβλήματος κατά τον Ιπποκράτη τον Χίο.

Στο παρακάτω σχήμα , έχω πάνω σε δύο κάθετους άξονες τα τμήματα α στον ψψ΄ και 2 α στον χχ΄ . αν μπορέσω να φέρω από τα Α και Β δύο παράλληλες ΑΚ//ΒΛ έτσι ώστε το τμήμα ΚΛ να είναι κάθετο σε αυτές, τότε το πρόβλημα λύθηκε, αφού



στο τρίγωνο ΟΚΛ για το ύψος επί την υποτείνουσα χ έχω

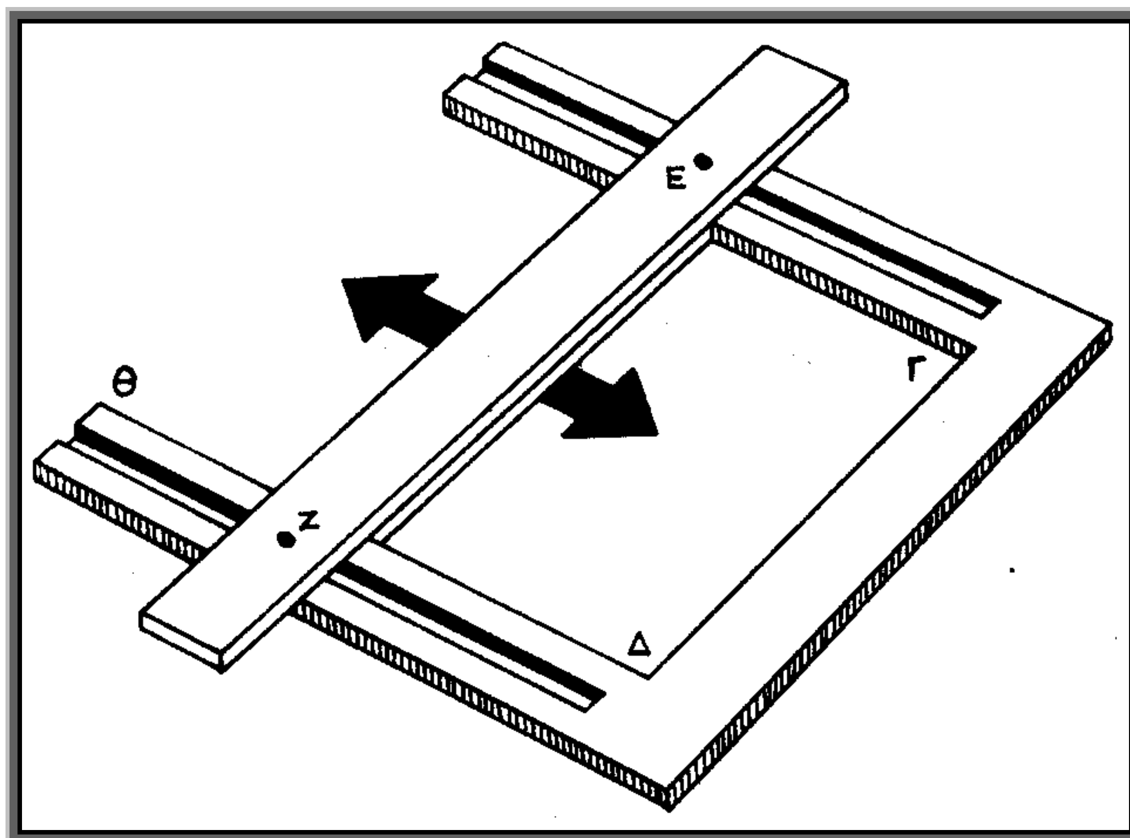
$\chi^2=\alpha.\ О\Lambda$ (1), στο ορθογώνιο ΒΚΛ έχω $О\Lambda^2=\chi\ .\ 2\alpha$ (2)

Λύνοντας την (1) ως προς ΟΛ , αντικαθιστώ στην (2) και έχω διαδοχικά :

$$O\Lambda=\frac{\chi^2}{\alpha}\xrightarrow{(2)}\left(\frac{\chi^2}{\alpha}\right)^2=\chi 2\alpha\rightarrow\frac{\chi^4}{\alpha^2}=2\alpha\chi\rightarrow\chi^4=2\alpha^3\chi\rightarrow\chi^3=2\alpha^3$$

$$\chi\ =\alpha\sqrt[3]{\alpha}=OK$$

Το όργανο με το οποίο επιτυγχάνεται η κατασκευή του Χ , είναι το παρακάτω:



Εικόνα 3: Ο κυβιστής του Πλάτωνος

Το ανωτέρω όργανο χρησιμοποιείται ως εξής:

Η εσωτερική κορυφή Δ του οργάνου τοποθετείται σε τυχαίο σημείο της Οψ . Φροντίζουμε , η πλευρά ΔΓ να περνάει από το Β . Κινούμε την ΕΖ , γλυστρώντας ταυτόχρονα την κορυφή Δ , πάνω στην Οψ ,μέχρι να βρούμε την θέση, κατά την οποίαν , το κινητό στέλεχος ΕΖ , να περνά από το σημείο Α και από την τομή Κ της Οχ και της πλευράς ΔΘ του οργάνου.

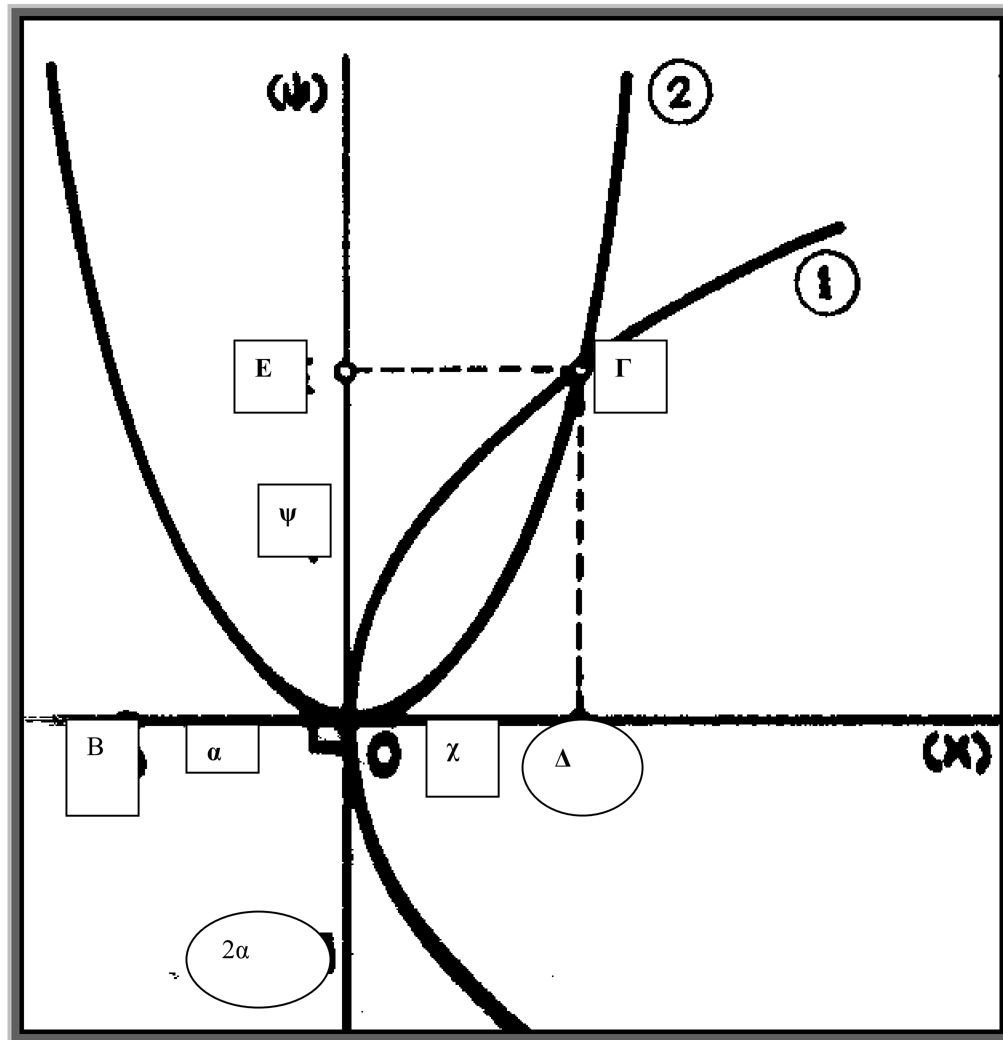
Τότε , τα ζητούμενα σημεία , θα είναι τα Λ και Κ.

<u>Μια λύση του Μεναίχμου</u>

Στο παρακάτω σχήμα ο Μέναιχμος κατασκευάζει δύο παραβολές , τις

$Ψ^2$=2αχ

$Χ^2$=αψ



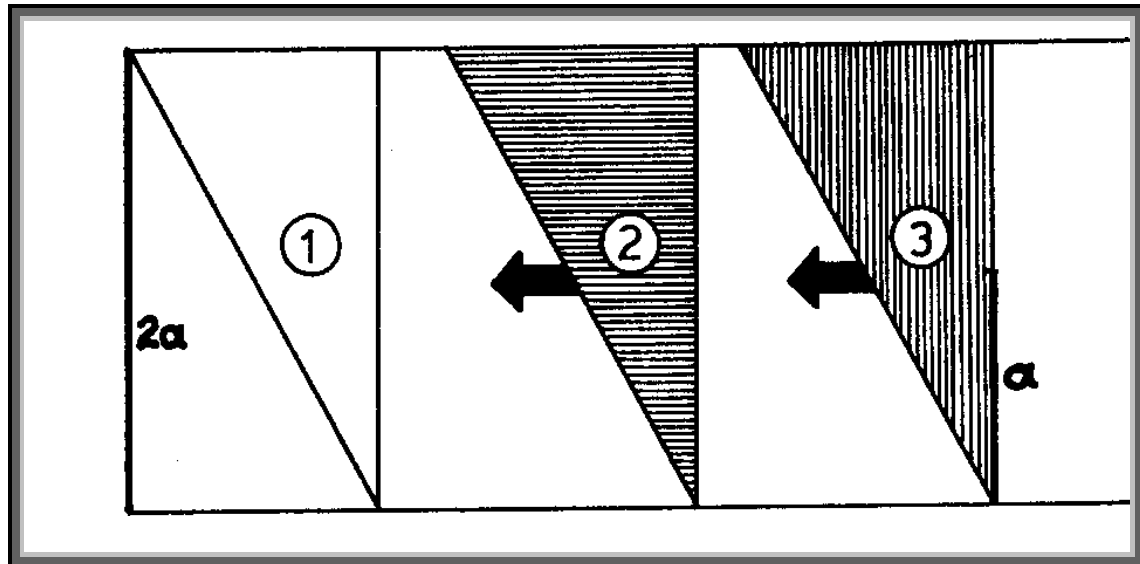
Η τομή τους είναι το Γ . Τότε . όπως ευκόλως μπορούμε αλγεβρικώς να διαπιστώσουμε, το ΟΔ είναι το ζητούμενο

$\chi = \alpha\sqrt[3]{2}$.

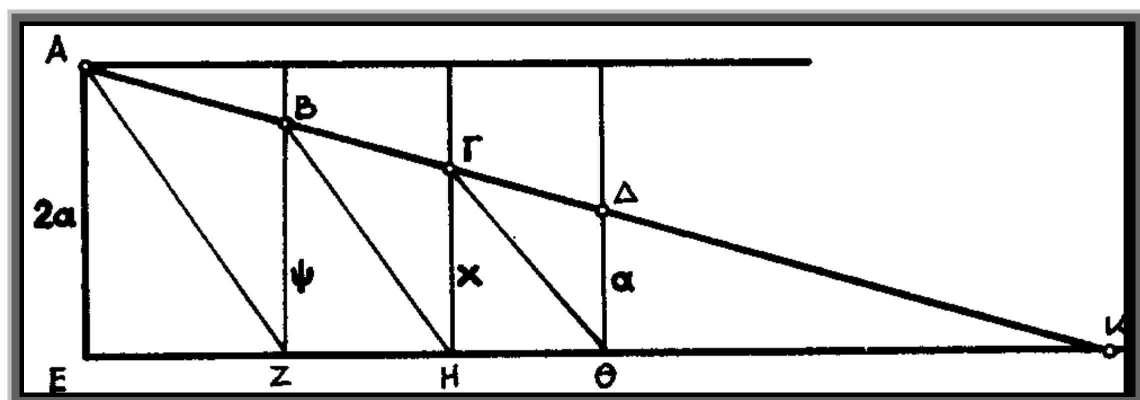
<u>Η λύση του Ερατοσθένους</u>

Η λύση αυτή υλοποιείται με την κατασκευή οργάνου που λέγεται «μεσολάβιον» και το οποίο επιτυγχάνει την κατασκευή των ενδιαμέσων χ και ψ όπως προέβλεπε η ανάλυση του Ιπποκράτους του Χίου.

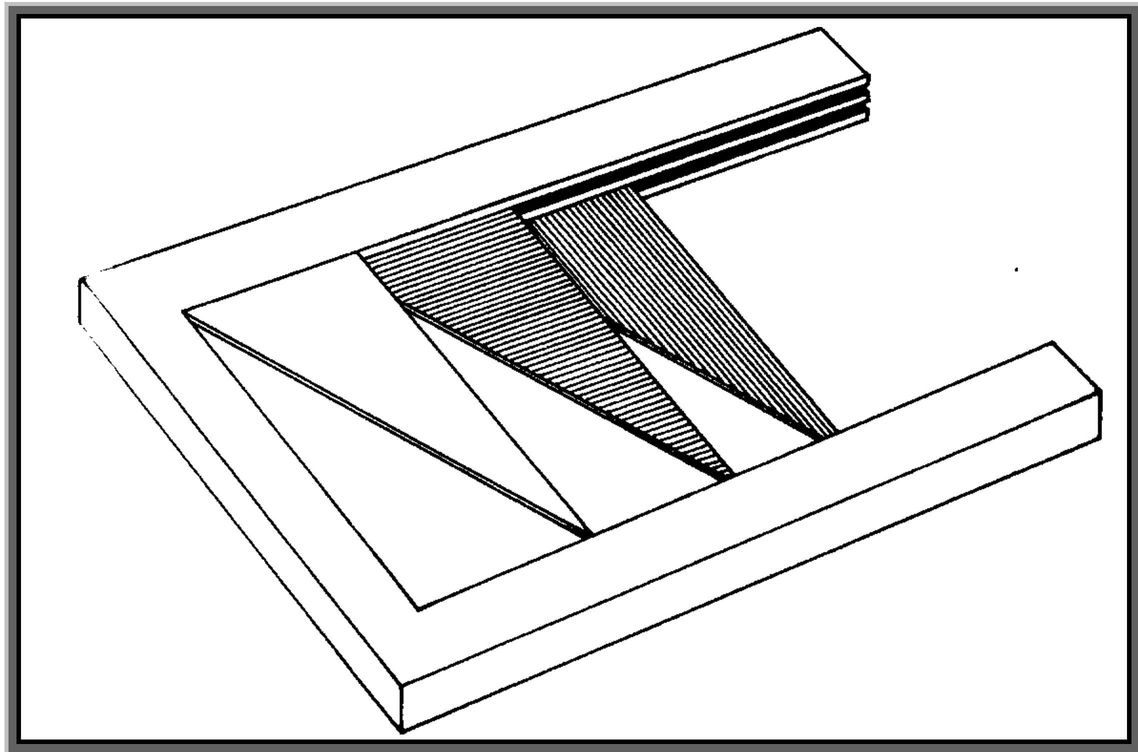
Στα παρακάτω σχήματα



Εικόνα 4: Με διαδοχικές μετατοπίσεις των κινητών τριγώνων βρίσκουμε τα ενδιάμεσα σημεία Γ και Β , καθιστώντας τα συνευθειακά με τα Δ και Α (βλέπε επόμενο σχήμα)



Εικόνα 5: λαμβάνοντας ως αρχή το τμήμα α , με κατάλληλη μετακίνηση των ίσων ορθογωνίων τριγώνων , βρίσκω τα Β και Γ . Από το Θεώρημα του Θαλή , προφανώς ισχύει η σχέση της γνωστής ανάλυσης του προβλήματος από τον Ιπποκράτη τον Χίο. Έτσι προσδιορίζεται το Χ .

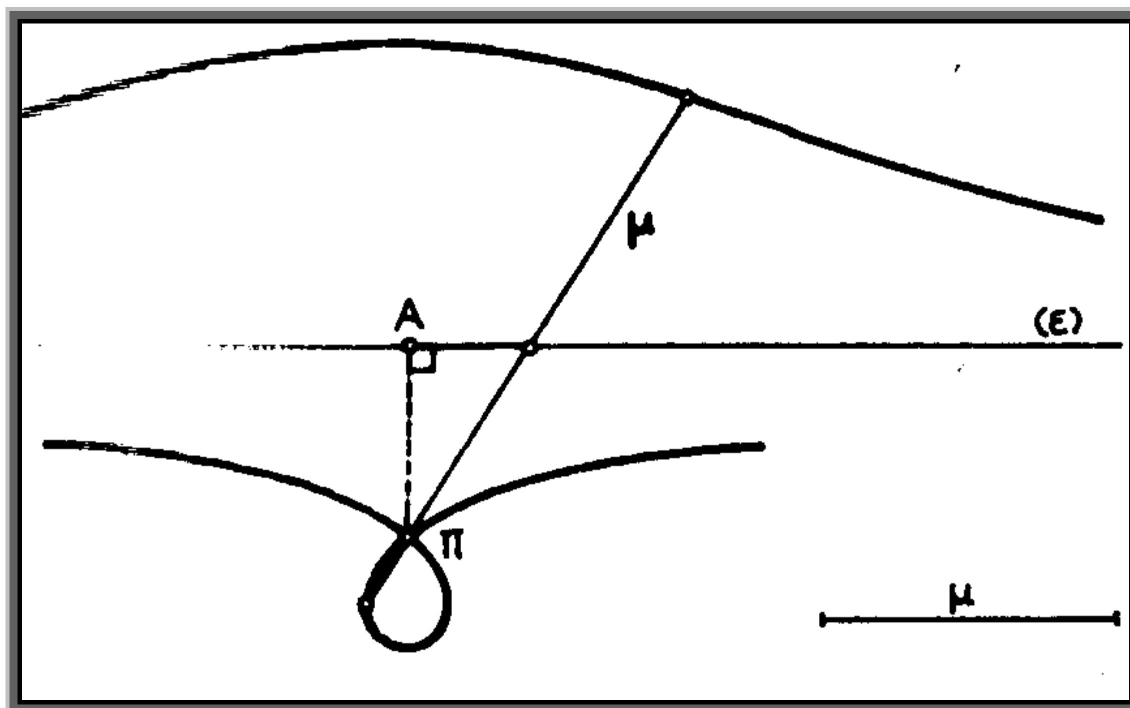


Εικόνα 6: Η υλοποίηση της λύσης του Δηλίου προβλήματος γίνεται με το κατωτέρω όργανο όπου τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα κινούνται συρταρωτά και επιτυγχάνεται η συνευθιακότητα.

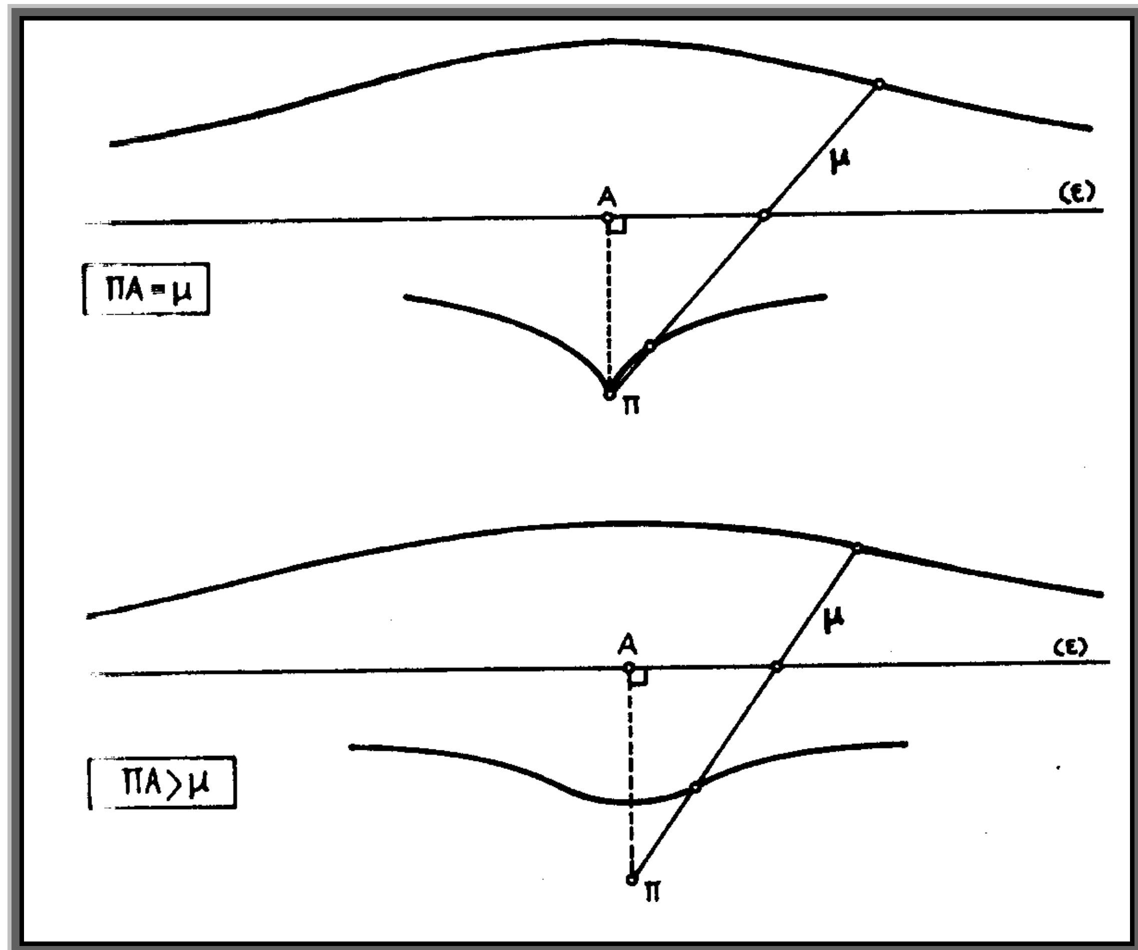
Η λύση με την βήθεια της κογχοειδούς του Νικομήδους

Αυτή η λύση είναι αρκετά πολύπλοκη, καθώς χρειάζεται η κατασκευή της κογχοειδούς του Νικομήδους , η πρόταση ΙΙ.6 των Στοιχείων του Ευκλείδη το πυθαγόρειο Θεώρημα, το θεώρημα του Θαλή , ομοιότητα τριγώνων κ..ά.

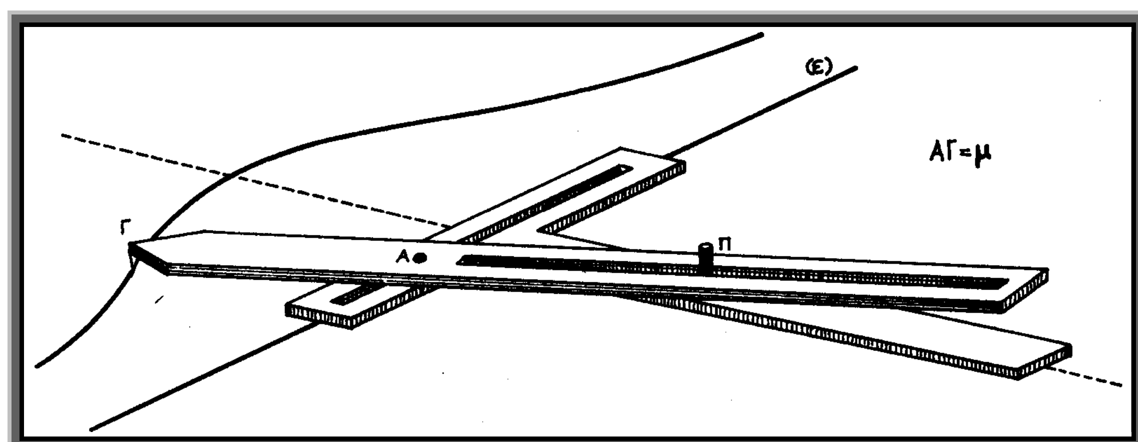
Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό και την κατασκευή της κογχοειδούς.



Εικόνα 7: Έχουμε ένα σταθερό σημείο Π . επίσης μια σταθερή ευθεία (ε) . Ακόμα έχουμε σταθερό ΄κατά μήκος ένα ευθ. τμήμα μ . Από το Π , φέρω την οικογένεια των ευθειών που τέμνουν την (ε) . Εκατέρωθεν των σημείων τομής της (ε) με την οικογένεια των ευθειών , λαμβάνω τμήματα ίσα με μ . Με ένωση όλων των σημείων έχω την κογχοειδή. Στο παραπάνω σχήμα , τυχαίνει η απόσταση του Π από την (ε) να είναι μικρότερη από το μ και η κογχοειδής έχει και έναν βρόγχο .Στα επόμενα δύο σχήματα, έχομε τις υπόλοιπες δύο περιπτώσεις όταν ΠΑ=μ και ΠΑ>μ



Εικόνα 8: Οι υπόλοιπες δύο περιπτώσεις για την κογχοειδή του Νικομήδη.

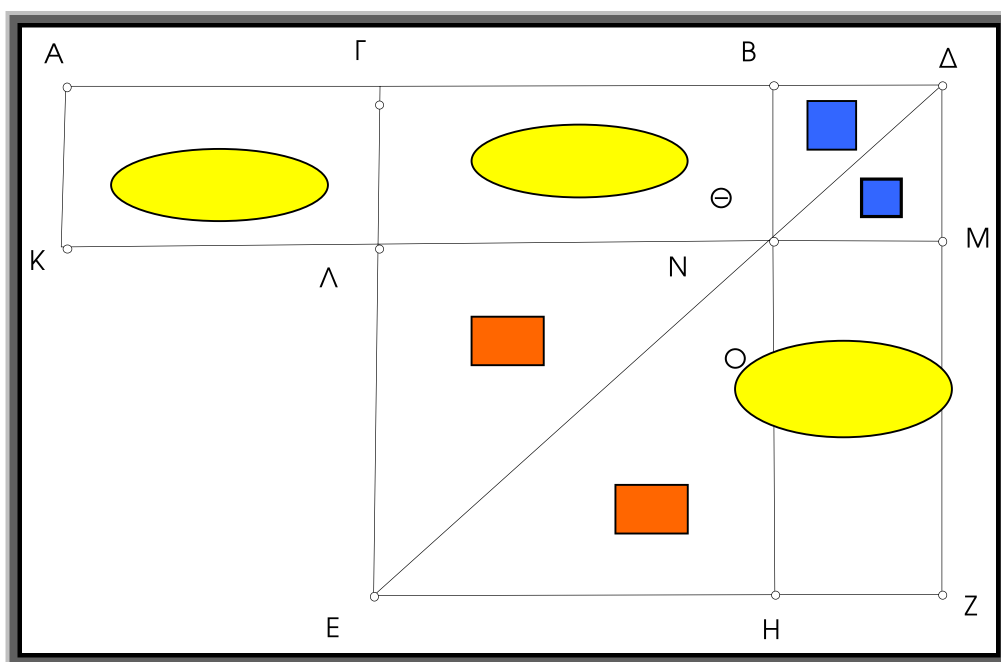


Εικόνα 9: Το όργανο που υλοποιεί την κατασκευή της κογχοειδούς . Το όργανο έχει δύο σταθερούς κάθετους κανόνες σε σχήμα «Τ» σταθερούς, και έναν κινητό.

Η γραφίδα κινείται πάντα κατά τέτοιο τρόπο , έτσι ώστε να διέρχεται πάντα από τον πόλο Π και η γραφίδα να απέχει από την ευθεία πάντα μήκος μ .

<u>Πρόταση ΙΙ.6 Των Στοιχείων του Ευκλείδη:</u>

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.



Εικόνα 10: η απόδειξη της προτάσεως του Ευκλείδη καθίσταται προφανής από την παρατηρήσουμε την ισότητα των εμβαδών των σχημάτων που έχουν το ίδιο χρώμα. Ο Ευκλείδης κάνει κάτι παρόμοιο χρησιμοποιώντας τον γνώμονα ΓΔΖΗΝΛ. Παραθέτουμε την απόδειξη από το πρωτότυπο.

<u>Η Απόδειξη της ΙΙ.6 των Στοιχείων από το πρωτότυπο:</u>

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω,
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ

τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ·

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ας δούμε όμως πώς ο Νικομήδης υλοποίησε την κατασκευή του, στο παρακάτω σχήμα:

Ο Νικομήδης θεωρεί δύο κάθετους άξονες Βχ και Βψ και πάνωτους τα μήκη ΒΑ =2 α και ΒΓ=α . Επίσης θεωρεί τα μέσα τους Λ και Ε αντιστοίχως. Στην Βγ φέρνει μεσοκάθετο και και πάνω της κατασκευάζει σημείο Ζ με την ιδιότητα ΓΖ =α παίρνει και ΗΒ=ΑΔ=α . Από το Η φέρνει την ΗΖ και από το Γ την παράλληλο (ε0 προς αυτήν.

Στην συνέχεια, με την βοήθεια της κογχοειδούς, ο Νικομήδης κατασκευάζει με ταξύ των πλευρών της γωνίας εΓχ , τμήμα α , έτσι ώστε προεκτεινόμενο , να περνά από το Ζ . Αυτό επιτυγχάνεται, αν πάρουμε ως πόλο της κογχοειδούς το Ζ , βάση την Γε και σταθερό διάστημα το μήκος α .

Η κογχοειδής τέμνει την Βχ σε σημείο Κ και η ΚΔ την Βψ στο Μ . Τότε , στα τμήματα ΒΑ=2 α και ΒΓ =α , μέσες ανάλογες είναι οι ψ=ΓΚ και χ=ΑΜ. Έτσι θα έχω χ= $\alpha\sqrt[3]{2}$

Πώς όμως δικαιολογείται αυτό;

Ας το δούμε:

Σύμφωνα με την ΙΙ.6 , θα ισχύει:

$ΒΚ\ ΓΚ+ΕΓ^2=ΕΚ^2$ (1)

Με πρόσθεση και στα δύο μέλη της (1) του $ΕΖ^2$, έχω:

$ΒΚ\ ΓΚ+ΕΖ^2\ +ΕΖ^2= ΕΚ^2 + ΕΖ^2 \Rightarrow$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$ΒΚ\ ΚΓ\ +α^2= ΖΚ^2$ (*)

Ομοίως , για το τμήμα ΑΒ που έχει προέκταση το ΑΜ , θα έχω :

$ΒΜ\ ΜΑ\ +α^2 = ΛΜ^2$ (**)

ΓΘ//ΗΖ→ (θεώρημα Θαλή) $\frac{2α}{ψ} = \frac{ΖΘ}{α}$

Επίσης τριγ. ΑΜΔ~ΔΓΚ, από όπου έχω: $\frac{2α}{ψ} = \frac{χ}{α}$

Από τις δύο τελευταίες σχέσειςέχω ότι $χ=ΖΘ \Rightarrow χ+α=ΖΘ+α$ καθώς και $\frac{2α}{ψ} = \frac{ΖΘ}{α} = \frac{χ}{α}$ (3)

Δηλ. ΖΚ=ΛΜ(***)

Από (*), (**),(***) έχω ότι ΒΚ ΓΚ =ΒΜ ΑΜ ή

$\frac{ψ}{χ} = \frac{ΒΜ}{ΒΚ}$ (#)

Αλλά από τα όμοια τρίγωνα ΜΒΚ ~ ΜΑΔ έχω: $\frac{ΒΜ}{ΒΚ} = \frac{χ}{α}$ (##)

Έτσι , από (#) και (##) έχω $\frac{ψ}{χ} = \frac{χ}{α}$

Από την τελευταία σχέση και από την (3) , έχω ότι

$\frac{2α}{ψ} = \frac{ψ}{χ} = \frac{χ}{α}$ που μας δίνει το αποδεικτέο.

Το “Δήλιο πρόβλημα” μέχρι και τον 19ο αιώνα απασχόλησε άπαντες τους μαθηματικούς και όχι μόνο. Έγινε αντικείμενο ιδιαίτερης μελέτης και τελικά χαρακτηρίστηκε ως άλυτο, αφού η λύση του με την χρήση αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη είναι αδύνατη.

Με το πρόβλημα ασχολήθηκαν, επίσης, ο Εύδοξος, ο Descartes και ο Longchamps, οι λύσεις όμως που πρότειναν οδηγούσαν σε καμπύλες και επιφάνειες βαθμού μεγαλυτέρου του δύο.

Που όμως οφείλεται το αδύνατο της επίλυσης του διπλασιασμού του κύβου με τον κανόνα και το διαβήτη;

Το ζητούμενο είναι η εύρεση της πλευράς x, με μόνα εργαλεία τον κανόνα και το διαβήτη, ενός κύβου, που ικανοποιεί την εξίσωση χ^3-2=0 . Αν δεχθούμε ότι το x είναι κατασκευάσιμο, τότε αυτό ανήκει σε ένα σώμα F_k με στοιχεία u της μορφής $u = p + q\sqrt{\omega}$ με p, q, $\omega \in F_{k-1}$ (Τα σώματα F_k, F_{k-1} προκύπτουν με κατάλληλες προεκτάσεις μέσω συνεχών εξαγωγών κυβικών ριζών του σώματος F_0 , που ταυτίζεται στην προκειμένη περίπτωση με το σύνολο των ρητών αριθμών). Αποδεικνύεται, ότι αν $x = \omega + \varphi\sqrt{\nu}$ είναι λύση της εξίσωσης χ^3=2 τότε και η $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ είναι λύση της, γεγονός που οδηγεί σε άτοπο, αφού, τότε η εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές ρίζες, ενώ το $\sqrt[3]{2}$ είναι η μόνη πραγματική και οι υπόλοιπες φανταστικές (Σημειώνουμε ότι η εξίσωση χ^3=2 προκύπτει από διπλασιασμό κύβου με μοναδιαία πλευρά).

Η παραπάνω απόδειξη έδωσε τέλος στις προσπάθειες για την επίλυση του προβλήματος και κατέταξε το Δήλιο πρόβλημα μαζί με αυτά της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας, της κατασκευής κανονικών πολυγώνων πλευρών p^{ν} με p πρώτο και τον τετραγωνισμό του κύκλου στα λεγόμενα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα.

Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

Εισαγωγικά:

Η τριχοτόμηση της ορθής γωνίας είναι ένα εύκολο πρόβλημα, αφού το 1/3 της ορθής είναι η γωνία των 30^o η οποία κατασκευάζεται είτε με διχοτόμηση των 60^o από την κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου (πρόταση Ι.1 Στοιχείων) είτε από κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με μία κάθετη πλευρά ίση με το ήμισυ της υποτείνουσας.

Επομένως , η διχοτόμηση μιας αμβλείας γωνίας αφαιρουμένης της ορθής που τριχοτομείται, ανάγεται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, πράγμα που κατέστη δυσκολότατο.

Σήμερα γνωρίζουμε το αδύνατον της λύσης αυτού του προβλήματος με κανόνα και διαβήτη, αφού η εξλισωση που την εκφράζει είναι τρίτου βαθμού , χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου και να είναι κατασκευάσιμη.

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε την ταυτότητα:

$$\varepsilon\phi 3\theta = \frac{3\varepsilon\phi\theta - \varepsilon\phi^3\theta}{1 - 3\varepsilon\phi^3\theta}$$

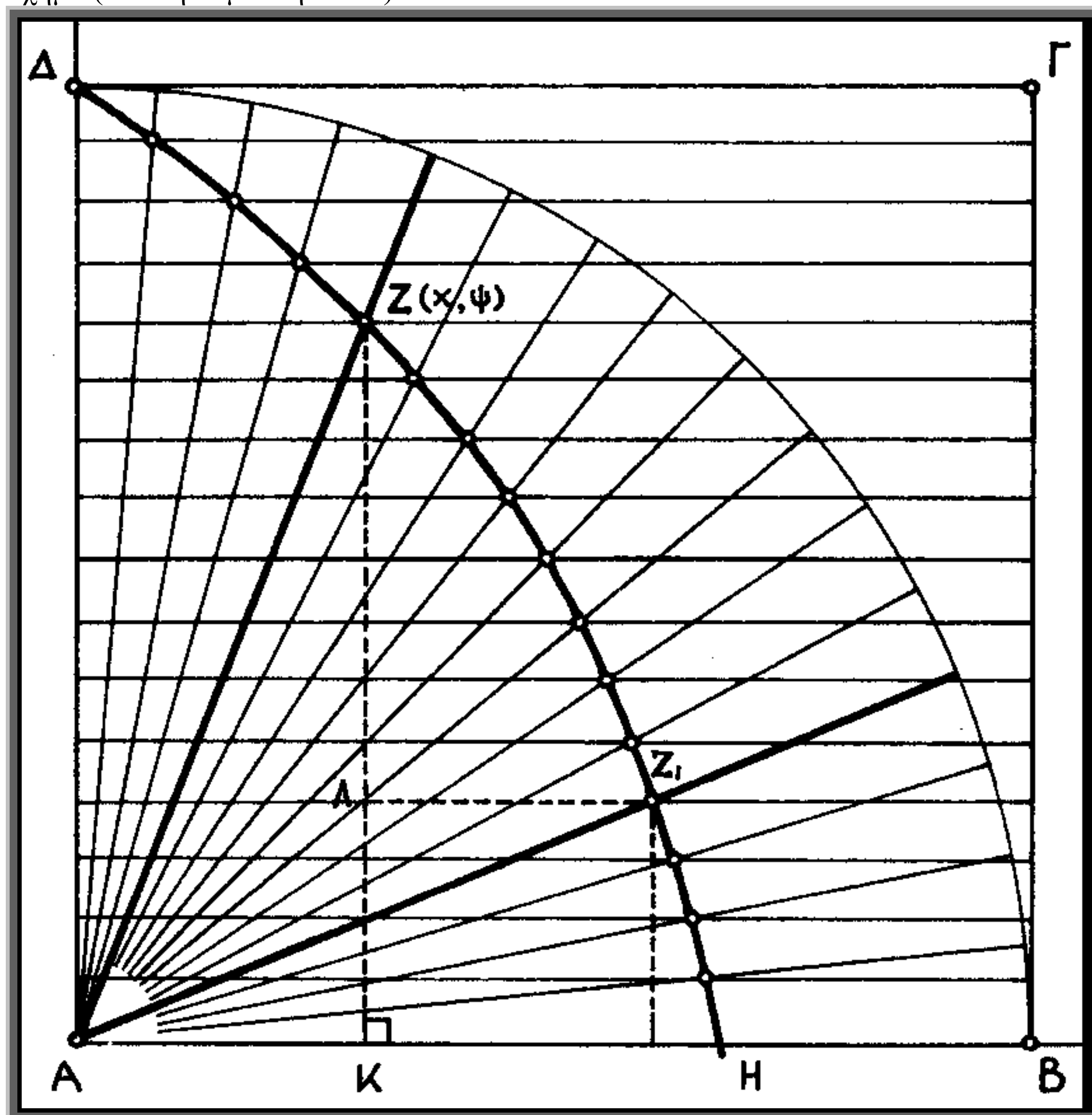
Σε αυτή την εξίσωση, αν θέσουμε εφ3θ=α (γνωστός) και εφθ=χ (άγνωστος) με πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμή της : χ^3-3αχ^2-3χ+α=0 , που είναι η εξίσωση η εκφράζουσα την τριχοτομία.

Ο τετραγωνισμός της εξίσωσης αυτής όπως απεδείχθη το 1837 είναι αδύνατος.

Η λύση του Ιππία του Ηλείου (με την τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτους)

Ο Ιππίας υπήρξε ο πρώτος γεωμέτρης που έλυσε το πρόβλημα, με την βοήθεια της καμπύλης που αργότερα ο Δεινόστρατος προσπάθησε να τετραγωνίσει τον κύκλο.

Στο παρακάτω σχήμα , φανταζόμαστε ένα σημείο στο Δ, το οποίο εκτελεί μια σύνθετη κίνηση:
1)Μία ομαλή ευθύγραμμη κίνηση κατά την διεύθυνση ΔΑ
2)Μία ομαλή κυκλική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από το Α , με ακτίνα ΑΔ.
Οι δύο προηγούμενες ταχύτητες, είναι τέτοιες ώστε ο χρόνος που απαιτείται για την διάνυση του διαστήματος ΑΔ , είναι ίσος με τον χρόνο που απαιτείται για στροφή 90^o .
Συνεπώς το Δ εκτελεί σύνθετη κίνηση και η τροχιά του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (είναι η καμπύλη ΑΖΗ)



Η καμπύλη αυτή κατασκευάζεται ως εξής:
Αφού σε ίσους χρόνους διανύονται ίσα διαστήματα και και διαγράφονται ίσες γωνίες, χωρίζω το τετράγωνο και το ΑΔ σε επαρκή αριθμό ίσων διαστημάτων με παράλληλες προς την ΑΒ . Κατόπιν κατασκευάζω τόσες ίσες γωνίες, όσα και τα διαστήματα που κατασκεύασα , χωρίζοντας την ορθή σε αντίστοιχα ίσα διαστήματα.

Στην συνέχεια κατασκευάζω το πρώτο σημείο της ζητουμένης καμπύλης , ως τομής του πρώτου διαστήματος και την πρώτης γωνίας. Δεύτερο σημείο η τομή του δευτέρου διαστήματος και την δεύτερης γωνίας. Τρίτο η τομή του τρίτου και την τρίτης γωνίας κ.ο.κ.
Στην συνέχεια συνδέω τα σημεία με όση ακρίβεια μπορώ. Όσο πιο πολλά τα ίσα διαστήματακαι οι γωνίες, τόσο καλύτερη η ακρίβεια που επιτυγχάνω.
Αν α η πλευρά του τετραγώνου, Τ ο χρόνος πτώσης υ η επικαμπύλιος ταχύτητα , ω η γωνιακή ταχύτητα, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha=\upsilon T$ και $\frac{\pi}{2}=\omega T$

Επισης για το τυχόν σημείο Ζ με συντεταγμένες (χ,ψ) θα ισχύουν:

$\alpha-\psi=\upsilon t$ και $\frac{\pi}{2}-\theta=\omega t$ όπου υ, ω οι ταχύτητες και t ο χρόνος κίνησης μέχρι το σημείο Ζ ενώ θ είναι η γωνία ΖΑχ

Επίσης ισχύει και η σχέση υ =ω α
Με απαλοιφή μεταξύ των σχέσων των αγνώστων υ, ω, Τ, παίρνω

$$\frac{\alpha-\psi}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\psi}{\theta}\Rightarrow$$

$$\psi=\frac{2\alpha}{\pi}\theta\Rightarrow$$

$$\psi=\frac{2\alpha}{\pi}\text{τοξεφ}\frac{\psi}{\chi}$$

Η τελευταία, είναι η εξίσωση της τετραγωνίζουσας με καρτεσιανές συντεταγμένες.
Επίσης ΑΗ =2α/π
Το παραπάνω, υποδηλώνει, ότι αν είναι δυνατόν να κατασκευασθεί η καμπύλη με κανόνα και διαβήτη, τότε και το π είναι κατασκευάσιμο.
Για την τριχοτόμηση όμως έχω:
Έστω ότι θέλω να τριχοτομίσω την οξεία γωνία θ =ΖΑΒ.
Από την εξίσωση της καπύλης έχω ότι ψ=2αθ/π , από την οποία (με διαίρεση και των δύο μελών με το 3) εξάγεται η σχέση:

$$\frac{\psi}{3}=\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\theta}{3}$$

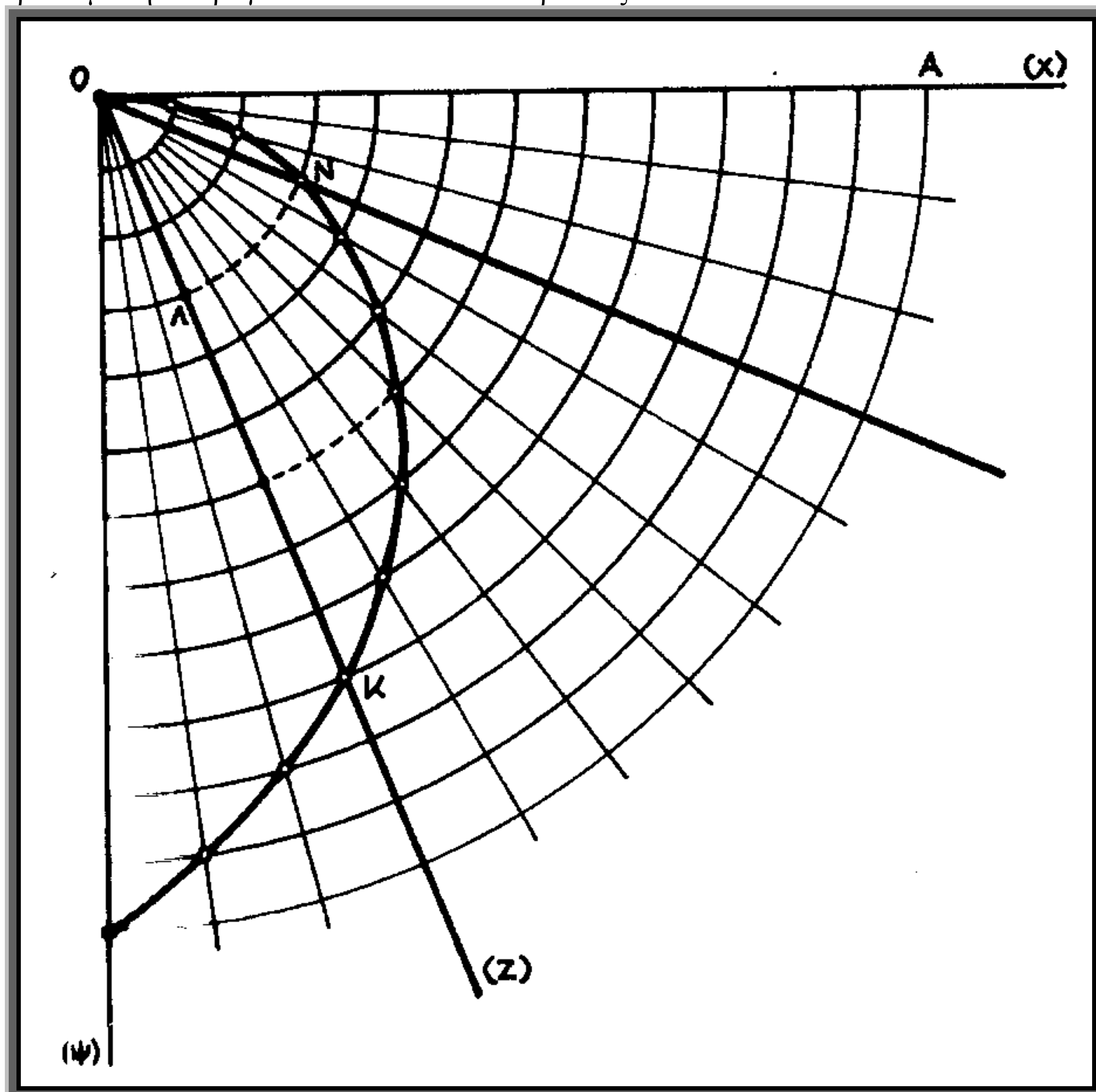
από την παραπάνω σχέση, έχω ότι το ζητούμενο σημείο για την τριχοτόμηση, είναι αυτό που έχει τεταγμένη ψ/3 , το οποίο ευκόλως προσδιορίζεται με τριχοτόμηση του τμήματος ΖΚ.

<u>Η λύση του Αρχιμήδη με την έλικά του</u>

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την έλικα του Αρχιμήδη, με την βοήθεια της οποίας μπορούμε να τριχοτομήσουμε μια γωνία. Η έλιξ είναι η καμπύλη ΟΝΚ , η οποία παράγεται, αν φανταστουμε ότο το σημείο Ο μετέχει δύο κινήσεων:

1) Μιας ομαλής κυκλικής κίνησης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και
2) Μιας ομαλής γραμμικής κατά μήκος μιας ακτίνας.

Σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσες γωνίες και ίσα διαστήματα στην επιβατική ακτίνα. Συνεπώς μπορεί να κατασκευασθεί από διακριτά σημεία κατά ανάλογο τρόπο με την τετραγωνίσουσα του Δεινοστράτους.



Κατασκευάζω ίσες γωνίες και ομόκεντρους κύκλους των οποίων οι ακτίνες είναι σε τυχούσα αριθμητική πρόοδο με θετική διαφορά .

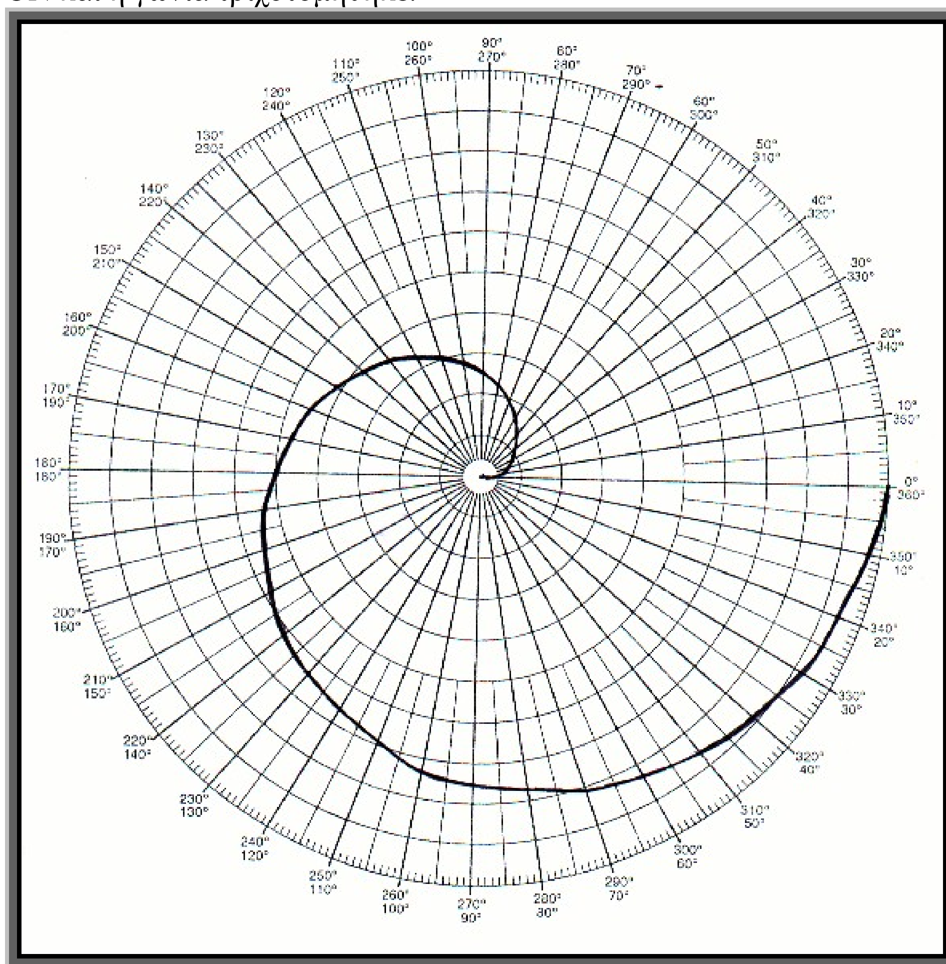
Με ανάλογο τρόπο όπως και με την τετραγωνίζουσα , την κατασκευάζουμε και εκπληροί την εξίσωση:

$\rho=\frac{R}{2\pi}\theta$, όπου R είναι η ακτίνα του πρώτου κύκλου(που λαμβάνω R=ω , με ω την διαφορά της προόδου)

Από την προηγούμενη με διαίρεση και των δύο μελών με το 3 , έχω:

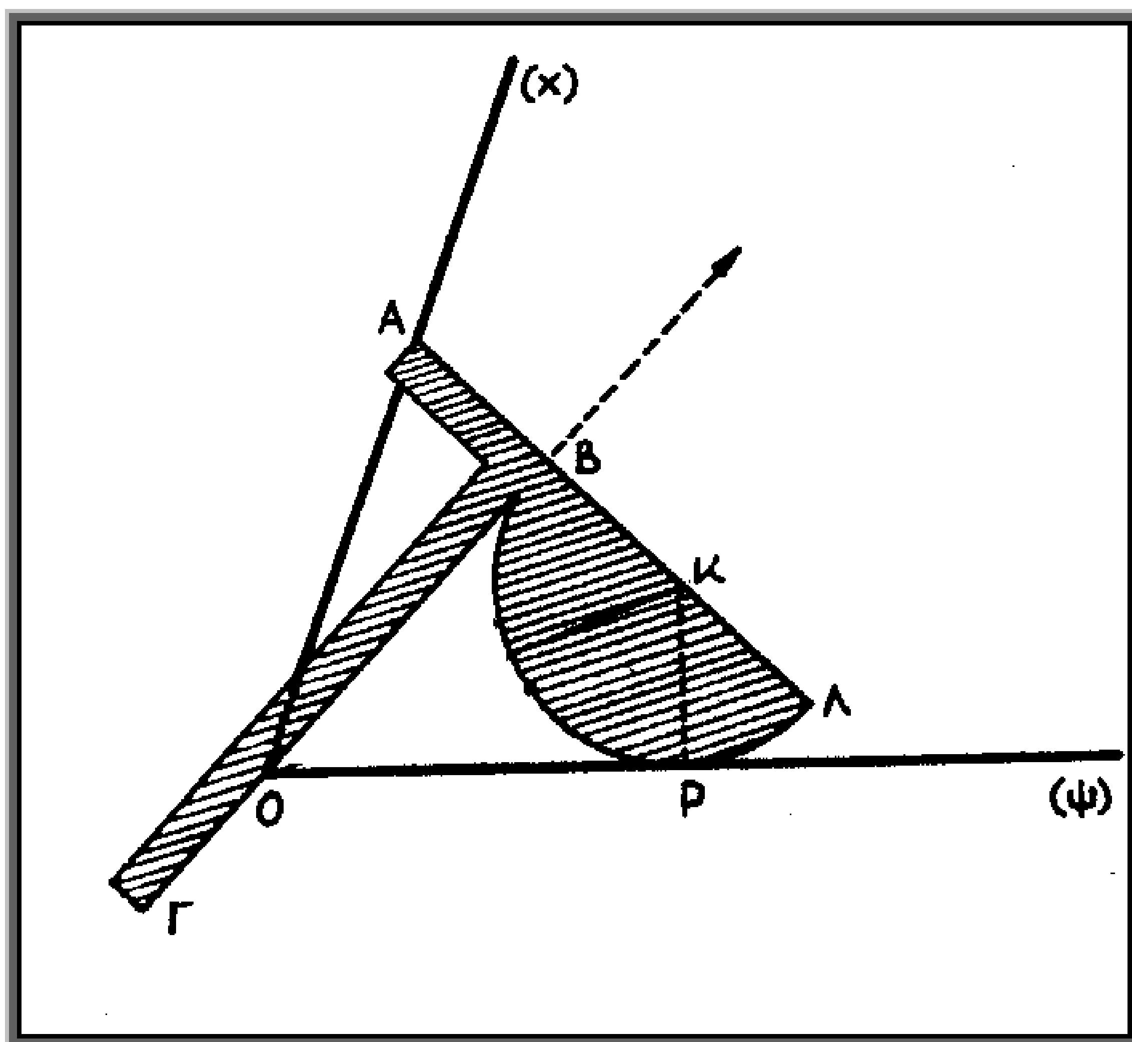
$\frac{\rho}{3}=\frac{R}{2\pi}\frac{\theta}{3}$ Δηλαδή το 1/3 της γωνίας θ , αντιστοιχεί στο 1/3 της πολικής ακτίνας ρ της καμπύλης κι αυτό για κάθε στιγμή της κίνησης .

Εάν λοιπόν έχω προς τριχοτόμηση την γωνία χOZ=θ . Τότε κάνω το εξής: Τριχοτομώ το ΟΚ και λαμβάνω το τμήμα ΟΛ=1/3 ΟΚ . Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΛ κατασκευάζω κύκλο , που τέμνει την έλικα σε σημείο Ν . Φέρω την ΟΝ και η γωνία τριχοτομήθηκε.



Εικόνα 11: Η έλιξ του Αρχιμήδη υλοποιημένη όχι για γωνία π/2 όπως πριν , αλλά για 2π.

<u>Άλλα όργανα και κατασκευές για την τριχοτόμιση:</u>
<u>Η κατασκευή του A. Pergassi (1893)</u>

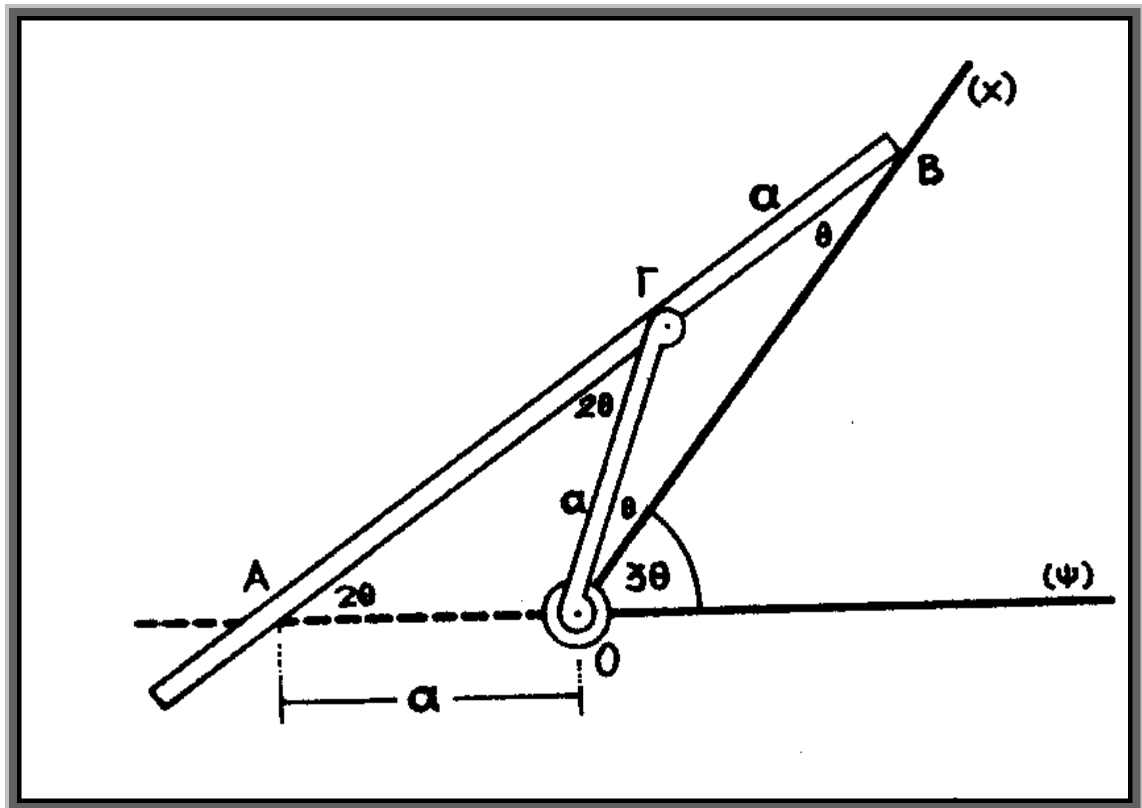


Στο παραπάνω σχήμα –όργανο, έχω το ημικύκλιο με κέντρο Κ , ενώ ισχύει ΑΒ=ΒΚ=ΚΛ

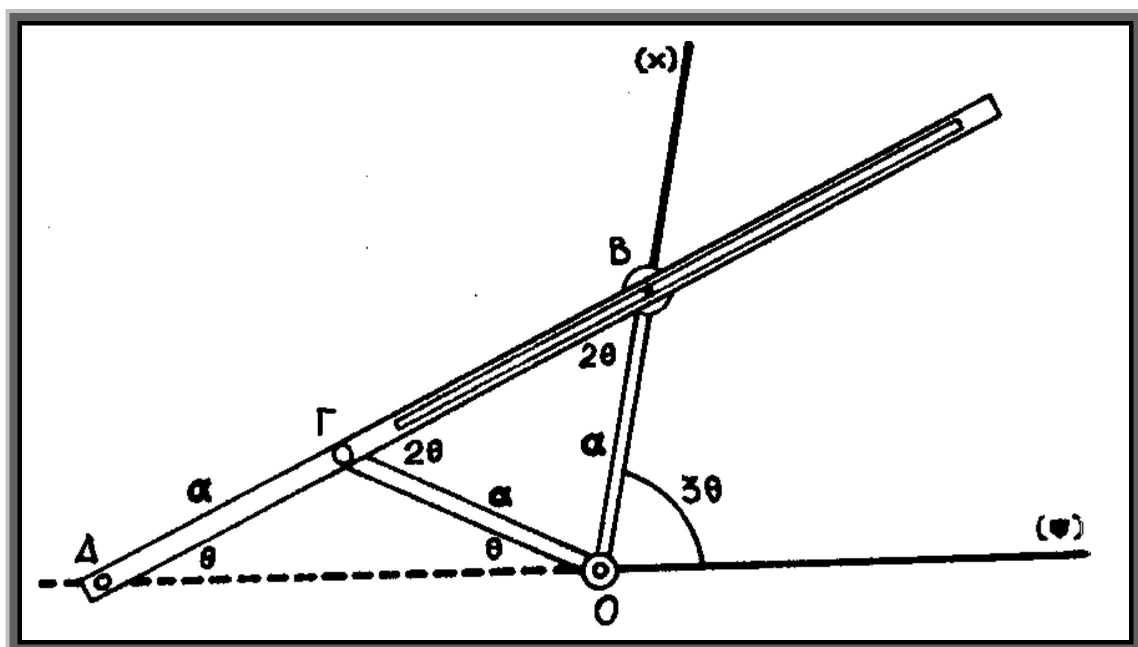
Συνεπώς αν προσαρμόσω την κορυφή Ο της προς τριχοτόμηση γωνίας στην ΓΒ , όπως φαίνεται στο σχήμα το άκρο Α στην μία πλευρά και το άλλο μέρος του οργάνου να εφάπτεται (το ημικύκλιο) στην άλλη πλευρά, , τότε οι γωνίες ΒΟΑ, ΒΟΚ , και ΚΟΡ είναι ίσες μεταξύ τους και η γωνία τριχοτομήθηκε.

Η απόδειξη είναι απλή και μπορεί να γίνει με την σύγκριση των τριών ορθογωνίων τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΚ , ΚΟΛ που είναι μεταξύ τους ίσα , απ' όπου απορρέει το ζητούμενο.

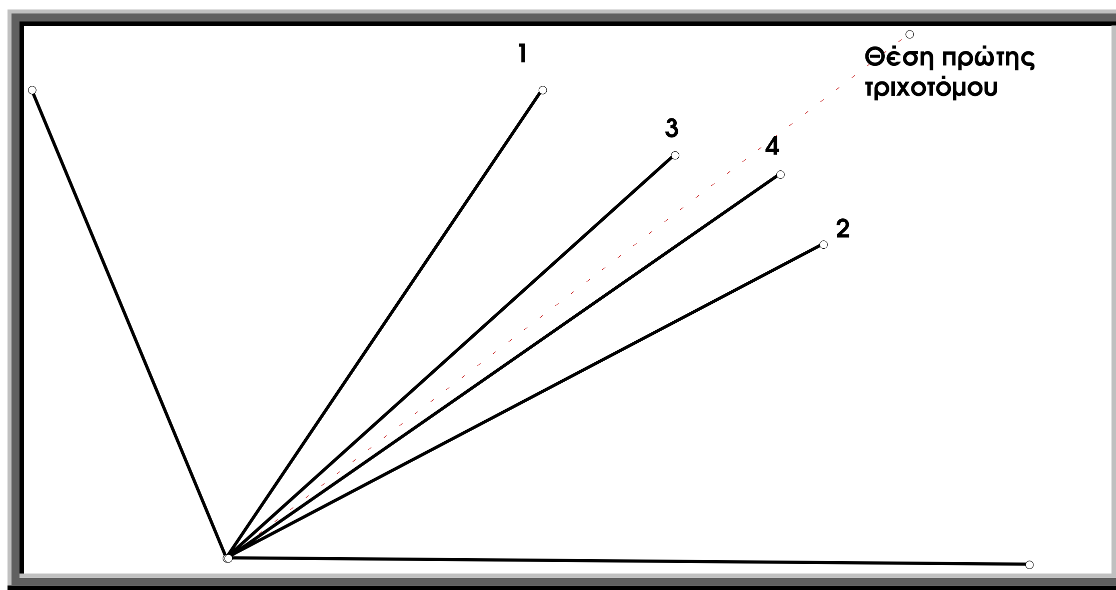
Παραθέτουμε ακόμη και την εικόνα άλλων δύο οργάνων που βασίζονται στην ιδέα του Αρχιμήδη με τα ισοσκελή τρίγωνα (μία από τις λύσεις που έχει δώσει ο μέγιστος αυτός μαθηματικός)



Εικόνα 12: Είναι προφανές ότι η απόδειξη της τριχοτομίας υλοποιείται πάνω στο σχήμα, με βάση την πρόταση ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο εντός κι απέναντι γωνιών.



Εικόνα 13 Και εδώ η ιδέα είναι ίδια με την προηγούμενη , αλλά το όργανο έχει κινητά μέρη και παραπάνω πολυπλοκότητα.



Εικόνα 14: (Eric Kincanon) Εδώ έχουμε τριχοτόμηση με διαδοχικές προσεγγίσεις που βασίζονται στην παρακάτω σειρά :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots =$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}\ldots\ldots\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\right)=$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

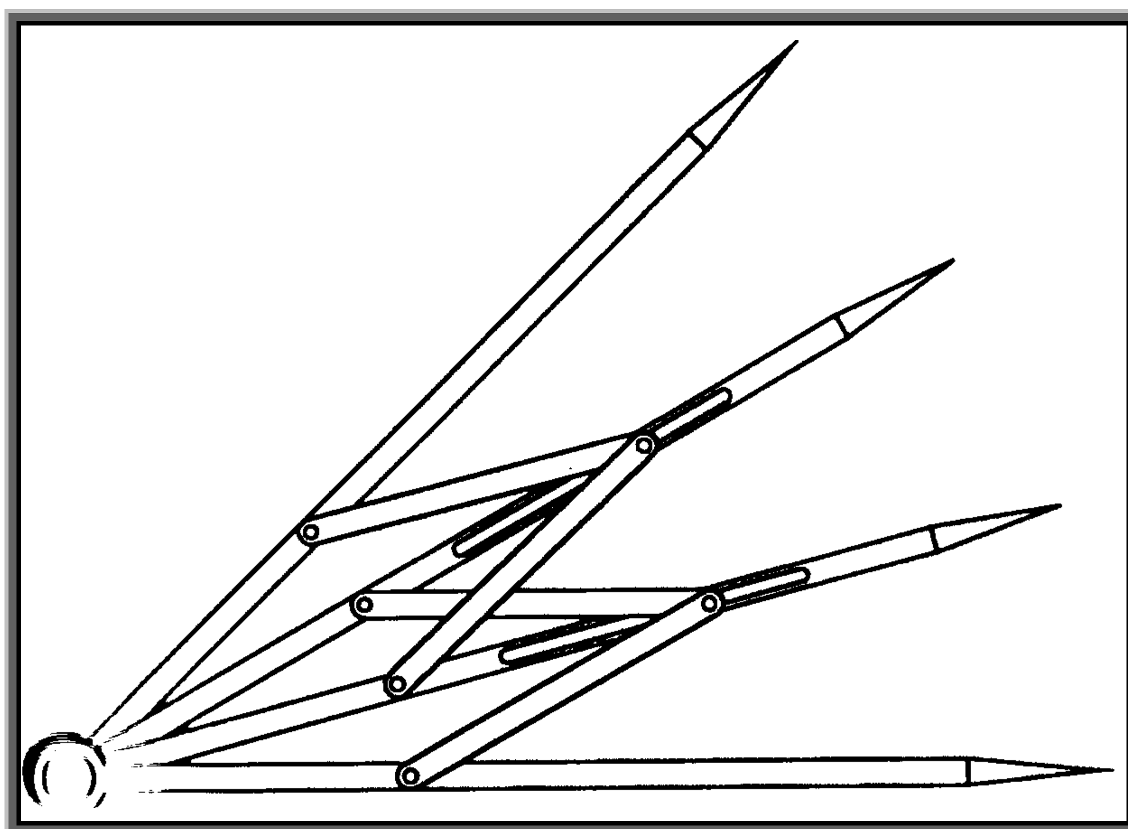
Με άλλο τρόπο η παραπάνω σχέση δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ως εξής:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots =$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{16})+(\frac{1}{32}-\frac{1}{64})+(\frac{1}{128}-.)+()........\ ....=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+..........\ ..=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

Ο Τριχοτόμος του Ισαάκ Ρούφους

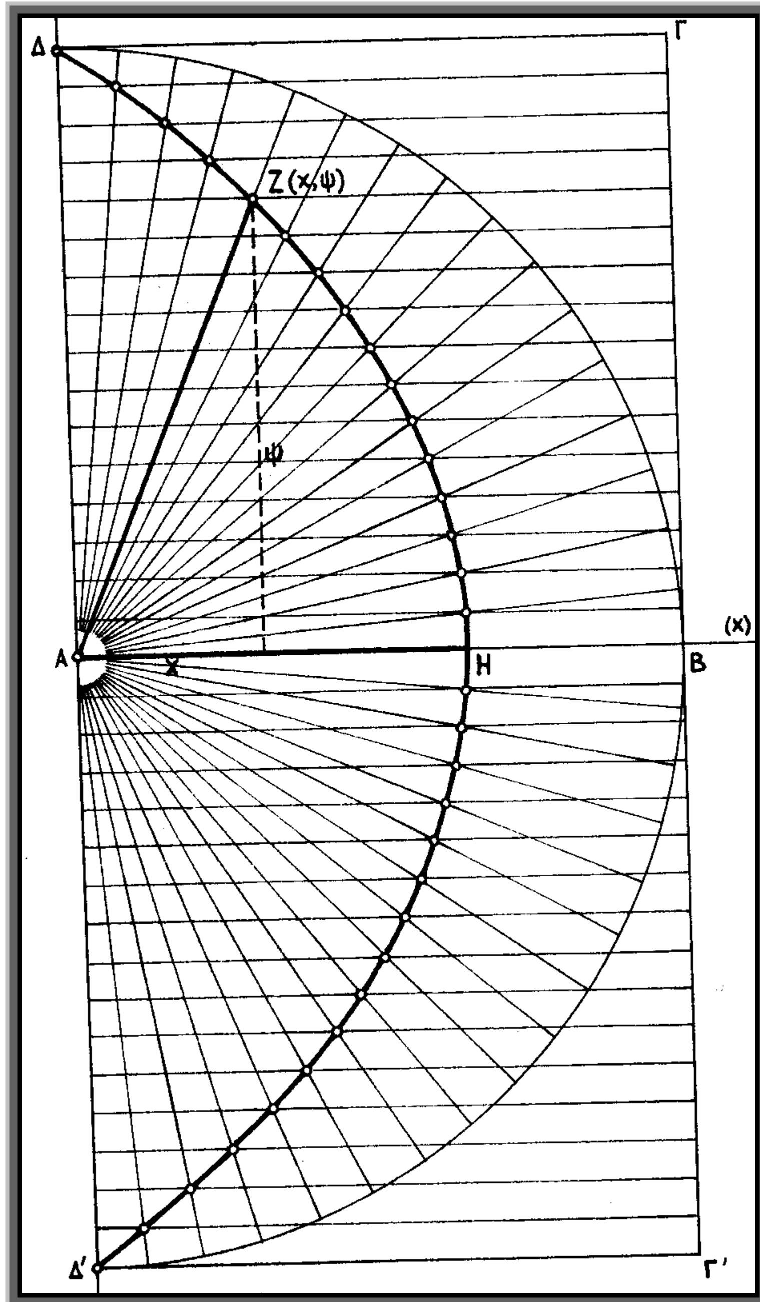


Εικόνα 15: Οι δύο ίσοι ρόμβοι με τα τέσσερα ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα , εξασφαλίζουν την τριχοτόμηση της γωνίας.

<u>Ο Τετραγωνισμός του Κύκλου</u>

Η Καμπύλη του Ιππία του Ηλείου

Αυτήν την είδαμε και πριν , καθώς την καμπύλη αυτή επινόησε η Ιππίας, αλλά είναι και γνωστή ως τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτους, αφού χρησιμοποιείται και για τον τετραγωνισμό του κύκλου όπως προείπαμε. Ένα άλλο σχήμα όπου υλοποιείται σε γωνία π και όχι π/2 όπως προηγουμένως είναι το παρακάτω:



Είναι γνωστό ότι έχουμε καρτεσιανή εξισωση :

$\psi = \frac{2\pi}{\alpha}\text{τοξεφ}\frac{\psi}{\chi}$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου.

Η παραπάνω εξίσωση αν επιλυθεί ως προς χ και μετασχηματισθεί κατάλληλα, μπορεί να φθάσει στην παρακάτω μορφή:

$$\chi = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{\psi\frac{\pi}{2\alpha}}{\text{εφ}\frac{\pi\psi}{2\alpha}}$$

έτσι , αν πάρω το όριο της παραπάνω συναρτήσεως (αν την δω και έτσι) με $\psi \to 0$, τότε θα έχω:

$$\lim_{\psi \to 0} \chi = \lim_{\psi \to 0} \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\psi \dfrac{\pi}{2\alpha}}{\varepsilon\phi \dfrac{\pi\psi}{2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi \to 0} \chi = \frac{2\alpha}{\pi} \lim_{\psi \to 0} \frac{\psi \dfrac{\pi}{2\alpha}}{\varepsilon\phi \dfrac{\pi\psi}{2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi \to 0} \chi = \frac{2\alpha}{\pi} \lim_{\psi \to 0} 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi \to 0} \chi = \frac{2\alpha}{\pi} \lim_{\psi \to 0} 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi \to 0} \chi = \frac{2\alpha}{\pi}$$

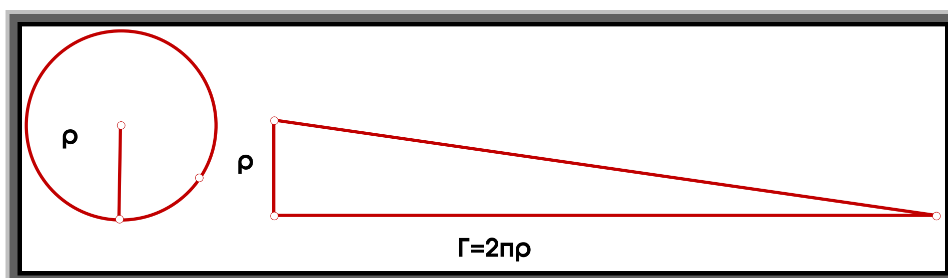
$$(\mathrm{AH}) = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Χρησιμοποιήσαμε την σχέση ότι $\lim\limits_{\psi \to 0} \dfrac{\psi}{\varepsilon\phi\psi}$

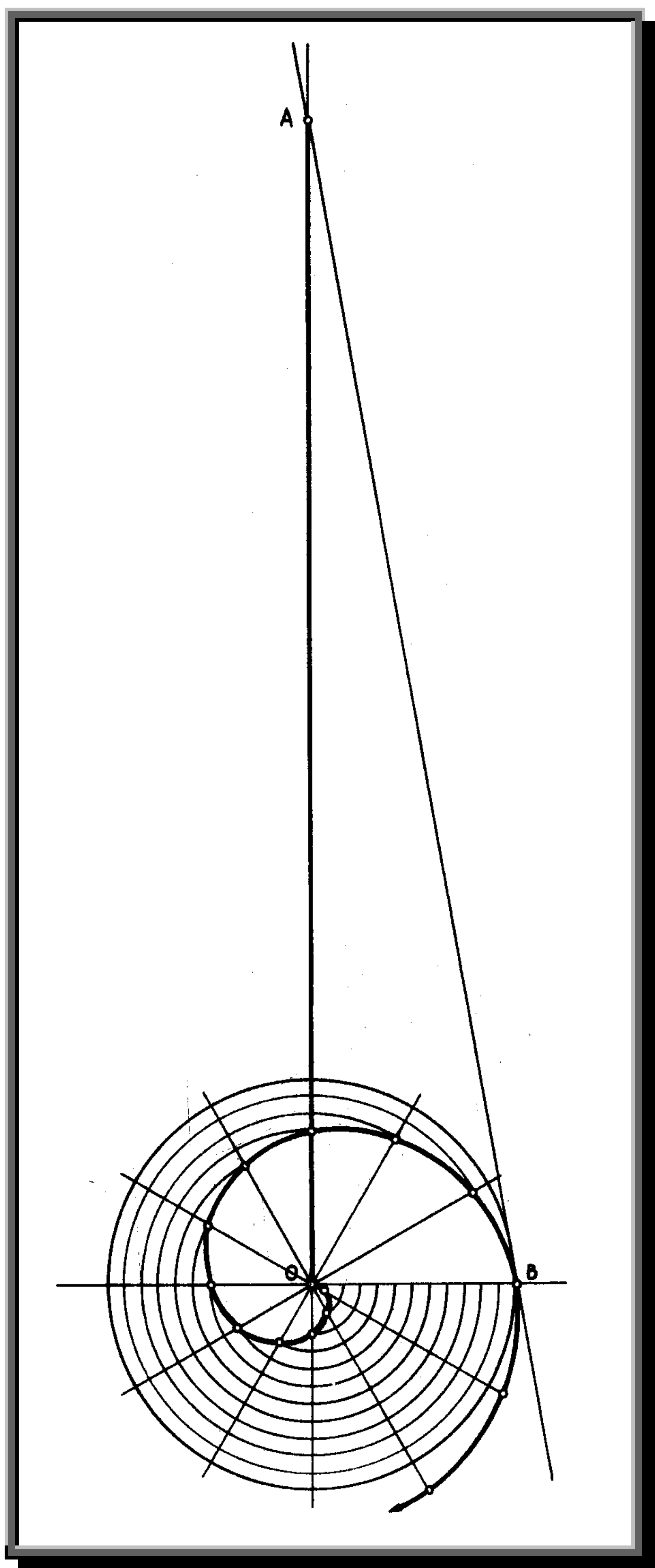
Η τελευταία σχέση μας λέει ότι από την κατασκευή του ΑΗ είναι δυνατή και η κατασκευή του π .

Η προσπάθεια του Αρχιμήδη

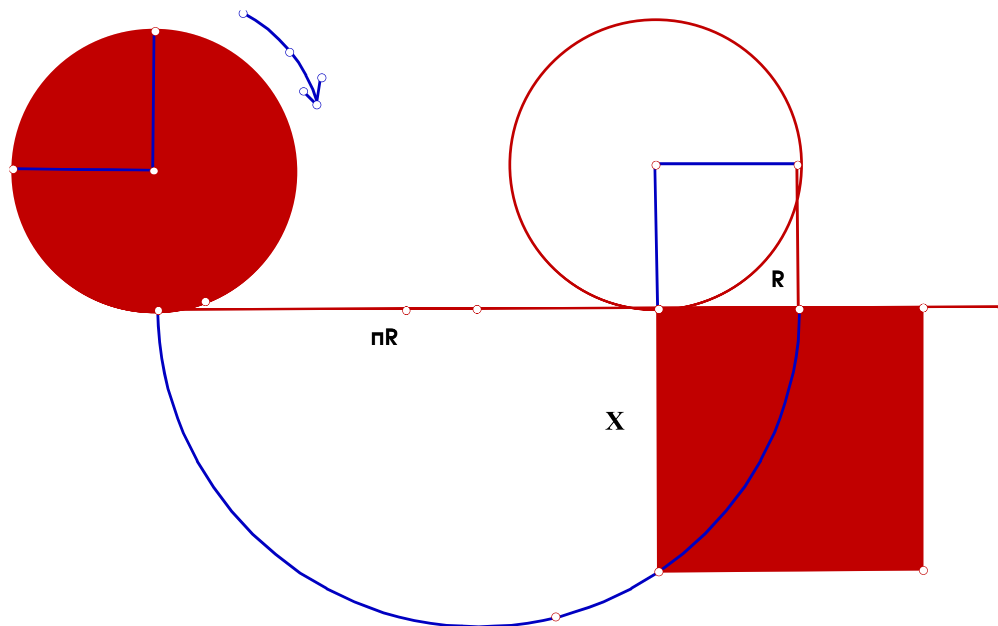
Ο Αρχιμήδης στο μνημειώδες έργο του «Κύκλου μέτρησις» αλλά και στο «περί ελίκων' λέει:
Κάθε κύκλος που η ακτίνα του είναι ίση με μια πλευρά ορθογωνίου τριγώνου και η περιφέρειά του είναι ίση με την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου, έχει εμβαδόν ίσο με το τρίγωνο αυτό.



Στο θεώρημα 18 του βιβλίου του περί ελίκων, αποδεικνύει , ότι :
Αν ευθεία γραμμή εφάπτεται στο πέρας της έλικος που είναι γεγραμμένη για πρώτη φορά, και αν από το σημείο που είναι η αρχή της έλικος αχθεί κάθετος στην αρχή της περιφοράς, τότε αυτή θα συναντήσει την εφαπτομένη και η ευθεία η μεταξύ της εφαπτομένης και της αρχής της έλικος, θα είναι ίση προς την περιφέρειαν του πρώτου κύκλου.
Δηλαδή, αποδεικνύει, ότι η πρώτη περιφέρεια έχει ως ανάπτυγμα το τμήμα ΟΑ .
Έτσι, σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα , το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο προς το τρίγωνο ΟΑΒ , το οποίο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τετράγωνο , κατά τα γνωστά.


A
O
B

Τετραγωνισμός κυλιόμενου κύκλου



Εικόνα 16: Η κύλιση του κύκλου για μισή στροφή , μας δίνει μήκος π R . Στο σχήμα έχω πR R =x^2 από γνωστή ιδιότητα του ύψους ορθογωνίου τριγώνου επί την υποτείνουσα. (Το ορθογώνιο τρίγωνο που είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο και δεν έχει σχεδιασθεί…..

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η απόδειξη του αδυνάτου της λύσεως των τριών διασήμων προβλημάτων με χρήση θεωρίας αλγευρικών επεκτάσεων

- Θεωρούμε στο επίπεδο ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Ο(0,0) και Ι(0,1) έχοντας λάβει την μονάδα αυθαίρετα . (Δηλ. το μήκος ΟΙ)
- Δίδεται ένα σύνολο σημείων S του επιπέδου , που περιέχει και τα σημεία Ο και Ι , και το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή και άλλων σημείων.
- Τα σημεία του S θα τα καλέσουμε **βασικά σημεία**

- Τι σημαίνει ***«κάνω μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη;»***

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Όταν λέμε ότι κάνω μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, κατ΄ουσίαν, εκτελώ μια πεπερασμένη ακολουθία των τριών ακολούθων μορφών:*

1. Χαράζω μια ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία , κάθε ένα από τα οποία είναι είτε ένα βασικό σημείο , είτε ένα άλλο που κατασκευάσθηκε προηγουμένως με την ακολουθία των απλών κατασκευών.
2. Χαράσσω κύκλο με κέντρο βασικό σημείο ή ένα σημείο που κατασκευάσθηκε προηγουμένως με την ακολουθία των βασικών κατασκευών και με ακτίνα , ίση με την απόσταση δύο σημείων, κάθε ένα από τα οποία είναι είτε βασικό σημείο, είτε κατασκευάσθηκε από μια ακολουθία απλών κατασκευών.
3. Σημειώνω τομή δύο ευθειών ή τομή δύο κύκλων ή τομή ευθείας και κύκλου.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι όταν εκτελώ κατασκευές όπως η 3) *λαμβάνω και νέα σημεία που δεν είχα προηγουμένως*.

- Ένα σημείο που παίρνω από στοιχειώδεις κατασκευές σημείων του S , λέγεται **κατασκευάσιμο** από το S .
- Το S περιέχει πάντα τα σημεία Ο και Ι .
- Ένας πραγματικός αριθμός α θα λέγεται **κατασκευάσιμος από το S** , αν το σημείο (α,0) είναι κατασκευάσιμο από το S .

Μπορούν να αποδειχθούν εύκολα τα εξής:

i) Αν α, β πραγματικοί, και κατασκευάσιμοι από το S , τότε και το σημείο (α,β) είναι κατασκευάσιμο από το S και αντιστρόφως.

ii) Αν α, β κατασκευάσιμοι πραγματικοί αριθμοί , τότε και α+β, α-β, αβ , 1/α , 1/β , β/α ($\alpha \neq 0$) κατασκευάσιμοι.

Με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε, ότι επειδή τα σημεία (0,0) και (1,0) είναι βασικά σημεία, **κάθε ρητός είναι κατασκευάσιμος**.

- Q(S) , είναι το σώμα που προκύπτει από το σώμα Q , αν του προσαρτήσουμε κι όλες τις συντεταγμένες των σημείων του S .

ΔΗΛΑΔΗ: Το Q(S) αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς κατασκευάσιμους από το S .

Ορισμός1: Έστω F σώμα με $Q \subseteq F \subseteq R$ $Q \subseteq F \subseteq R$. Ένα σημείο με συντεταγμένες μέσα από το F θα το καλέσουμε **F-σημείο**.

Ορισμός 2: Μια ευθεία της οποίας η εξίσωση μπορεί να πάρει την μορφή αχ+βψ+γ=0 με α, β, γ, στο F , θα κληθεί **F-ευθεία.**

Ορισμός 3: ένας κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2+\alpha\gamma+\beta\psi+\gamma=0$ με α,β,γ, στο F , θα καλείται **F- κύκλος.**

Ισχύει το παρακάτω λήμμα:

ΛΗΜΜΑ: (i) Η ευθεία που διέρχεται από δύο F-σημεία είναι F-ευθεία.

(ii) Η τομή δύο F- ευθειών, όταν υπάρχει , είναι ένα F-σημείο.

(iii) Τα κοινά σημεία δύο F-κύκλων ή μιας F- ευθείας και ενός F-κύκλου, όταν υπάρχουν , είναι F΄σημεία , όπου είτε F΄=F , είτε [F':F]=2 (:=Η διάσταση του δ.χ. F' επί του F)

Ορισμός: Αν Σ=Q(S) , το σώμα που προκύπτει από την προσάρτηση όλων των συντεταγμένων των σημείων του S στο σώμα Q . Ρ(α,β) είναι ένα τυχόν σημείο

του επιπέδου. Συμβολίζω με Σ(P) το σώμα που παίρνω αν προσαρτήσω τις συντεταγμένες του P , στο Σ . Δηλαδή , Σ(P)=Σ(α,β) .

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Βασικό) Αν το σημείο P είναι κατασκευάσιμο από το S , τότε [Σ(P):Σ]=2^{ν}.

<u>Πώς εφαρμόζονται τα προηγούμενα στον διπλασιασμό του κύβου, στην τριχοτόμηση της γωνίας και στον τετραγωνισμό του κύκλου;</u>

ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΥΒΟΥ: Αν λάβουμε την ακμή του κύβου ίση με την μονάδα, τότε, το σύνολο S , θα αποτελείται από το O και I , οπότε από Σ=Q .
Η πλευρά α του διπλασίου κύβου , θα πρέπει να πληροί την εξίσωση $\alpha^3=2$.
Επομένως, είναι ρίζα του πολυωνύμου $\chi^3-2=0$. Αλλά , το πολυώνυμο αυτό είναι ανάγωγο. (Εφαρμόζω λ.χ. το κριτήριο του Einsestein για p=2καθώς , $p \nmid 1$, $p \nmid 2^2$)
Έτσι, ο βαθμός του α επί του Q είναι 3 , δηλ [Q(α):Q]=3.
Εάν λοιπόν P είναι το σημείο (α,0) τότε Q(P)=Q(α) .
Όμως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα , επειδή το 3 δεν είναι δύναμη του 2 , το P και άρα και το α , δεν είναι κατασακευάσιμο.
Επομένως έχω το αδύνατο της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη.
ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ: Μια γωνία είναι κατασκευάσιμη απ΄ το S , αν και μόνο αν , το συνθ είναι κατασκευάσιμο. Επομένως , δοθέντος του συνθ , να κατασκευασθεί το συν(θ/3).
Γνωρίζουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $4\sigma\upsilon\nu^3(\theta/3)-3\sigma\upsilon\nu(\theta/3)=\sigma\upsilon\nu\theta$.
Άρα το συν(θ/3) είναι ρίζα του πολυωνύμου $4\chi^3-3\chi-r=0$, όπου r=συνθ.
Εδώ έχομε ότι Σ=Q(S) =Q(r)
Επομένως εξαρτάται από το r για το αν και κατά πόσον το ανωτέρω πολυώνυμο είναι ανάγωγο. Αν θ =60^o συνθ=1/2 και το πολυώνυνο (με απαλοιφή παρωνομαστών δίνει το ισοδύναμο) $8\chi^3-6\chi-1$ που είναι ανάγωγο (Με το κριτήριο του Einsestein για p=3)
Επί παραδείγματι, για θ=90^o , συνθ=0 , r=0 , και το πολυώνυμο $4\chi^3-3\chi$, δεν είναι ανάγωγο , διότι παραγοντοποιείται με ρητούς συντελεστές ,ως $\chi(4\chi^2-3)$.
επομένως, η ορθή τριχοτομείται.
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ:
Αν πάρουμε την ακτίνα του κύκλου ίση με 1 ,τότε θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά $\sqrt{\pi}$.
Αν το $\sqrt{\pi}$ ήταν κατασκευάσιμο, τότε θα έπρεπε το σώμα Q($\sqrt{\pi}$) να είναι αλγεβρική επέκταση του Q . Τότε όμως, [Q($\sqrt{\pi}$):Q] =2^{ν} . Έτσι όμως, το π θα ήταν ρίζα πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές. Ατοπο, διότι ο π είναι υπερβατικός , όπως ο Lidenmann to 1882 απέδειξε.
(Βλέπε και εργασία στο διαδύκτυο των Ι. Πλατάρου –Γ. Λατίφη-Β. Κατωπόδη «Η υπερβατικότητα των e και π»
http://www.mathematics.gr/ **(ΕΡΓΑΣΙΕΣ)**

Βιβλιογραφία:

1. ***«Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα»……*** *Δημήτριου Τσιμπουράκη -ΑΘΗΝΑ 1985*
2. ***«Τα περίφημα άλυτα Γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας»****…..Μαυρικίου Α. Μπρίκα –ΑΘΗΝΑ 1970*
3. ***Στοιχεία από τη μη διαφορική Γεωμετρία στα πλαίσια μιας χρονικά περιορισμένης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών Μαθηματικών. Επιλογή από νεώτερες εξελίξεις με ιστορικές νύξεις»*** *…Χρόνης Στράτζαλος ΑΘΗΝΑ 1999*
4. ***«Αποδείξεις χωρίς λόγια»*** *….Roger B. Nelsen Εκδόσεις Σαββάλας ΑΘΗΝΑ 1996*
5. ***«Στοιχεία της ευκλείδειας Γεωμετρίας*** *από την αποψη του Κλάϊν – εφαρμογές στην Φυσική» Σ. Ελευθερίου –Π. Λόης ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣΑΘΗΜΑ 1998*
6. ***Θεωρία Galois*** *Στυλιανού Ανδρεαδάκη*

Διαδύκτυο

http://mathematics.gr ***ΕΡΓΑΣΙΕΣ «Η υπερβατικότητα των αριθμών e και π»***